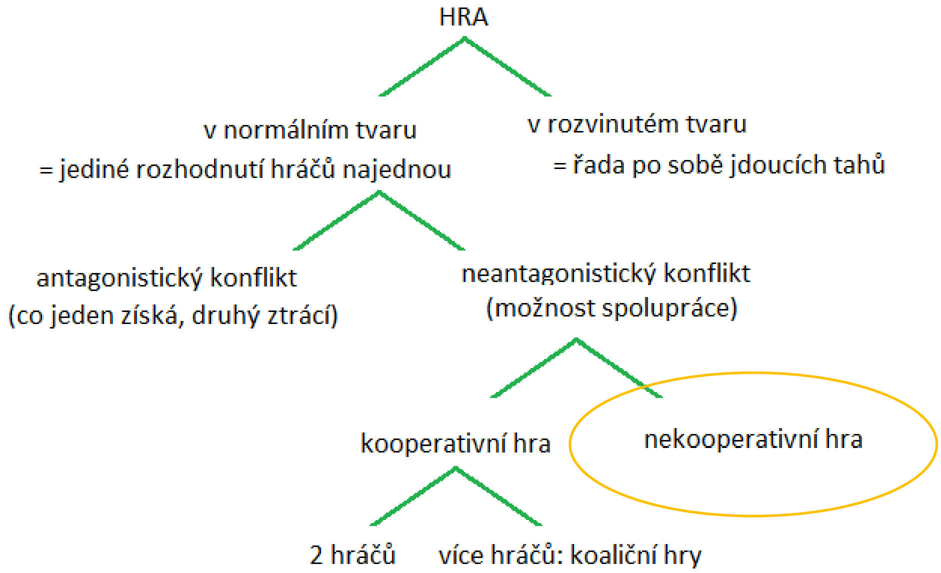
NEKOOPERATIVNÍ HRY

FORMULACE PROBLÉMU, KONCEPCE ŘEŠENÍ, SMÍŠENÍ ROZŠÍŘENÍ, MODELOVÉ KONFLIKTY

CO JE TO TEORIE HER A ČÍM SE ZABÝVÁ?

Teorie her je ekonomická vědní disciplína, která se zabývá studiem konfliktních situací. Konflikty bychom mohli zjednodušeně rozdělit takto:



JAK SI PORADIT S NEANTAGONISTICKÝM KONFLIKTEM?

Neantagonistický konflikt je takový konflikt, kdy zájmy hráčů nejsou v přímém protikladu (říkáme tomu hra s nekonstantním součtem). Výhra prvního hráče není prohrou druhého, někdy se jim tedy může vyplatit spolupracovat. Tyto hry rozdělujeme na kooperativní, kdy hráči mohou spolupracovat, je-li to pro ně výhodné, a nekooperativní, kdy spolupracovat nemohou.

Hra v normálním tvaru je dána:

- **množinou hráčů** $\{1, 2, \ldots, N\}$,
- **množinou prostorů strategií** $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$, kde X_i označuje prostor strategií i-tého hráče,
- **množinou výplatních funkcí** $\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$.

Předpokládáme, že tito hráči jsou inteligentní: snaží se maximalizovat svůj užitek (hodnotu výplatní funkce) a mají dokonalé informace o hře, tedy znají množinu hráčů, svůj prostor strategií a výplatní funkci a prostor strategií a výplatní funkci ostatních hráčů.

NEKOOPERATIVNÍ KONFLIKTY

Hru můžeme opět uspořádat do matice. Tentokrát ale neplatí, že co jeden hráč získá, druhý ztratí. Mezi maticemi není definovaný přímý vztah, takže potřebujeme dvě matice: A pro prvního hráče a B pro druhého hráče.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

První hráč (X) volí řádek, má tedy *m* možných strategií x_1 až x_m a získá a_{ij} (hodnota výplatní funkce prvního hráče). Druhý hráč (Y) volí sloupec, má tedy *n* možných strategií y_1 až y_n a získá b_{ij} (hodnota výplatní funkce druhého hráče). Prostor strategií je konečný, celkem existuje m · n různých kombinací. Každé kombinaci lze přiřadit výhru prvního hráče $f_1(x,y)$ a výhru druhého hráče $f_2(x,y)$.

ROVNOVÁHA V RYZÍCH STRATEGIÍCH

Návod, jak najít optimální strategii hráčů v bimaticové hře, dává opět Nashova rovnováha. Ta říká, že pokud se některý z hráčů odchýlí od své optimální strategie (zatímco soupeř se své optimální strategie držet bude), nepolepší si, neboli pokud se hráč nedrží optimální strategie, pohorší si a v nejlepším případě na tom bude stejně. Pro optimální strategie $x^o \in X, y^o \in Y$ tedy platí:

- $f_1(x,y^o) \leq f_1(x^o,y^o)$ = když se první odchýlí optimální strategie x^o a volí místo toho strategii *x*, zatímco druhý se své optimální strategie drží, tak získá méně či nejvýše stejně, jako kdyby se jí také držel
- $f_2(x^o,y) \leq f_2(x^o,y^o)$ = když se druhý odchýlí optimální strategie y^o a volí místo toho strategii *y*, zatímco první se své optimální strategie drží, tak získá méně či nejvýše stejně, jako kdyby se jí také držel

Tomuhle se říká **Nashovo rovnovážné řešení (Nashova rovnováha)**. Získáme ji nalezením **sedlového prvku** (sedlového bodu), což je číslo **největší ve svém sloupci v matici A** a **největší ve svém řádku v matici B**. Nejsnadněji se to dělá tak, že vytvoříme dvojmatici, v každém sloupci označíme všechny maximální hodnoty z prvních prvků a v každém řádku označíme všechny maximální hodnoty z druhých prvků.

$$\begin{pmatrix} a_{11}, b_{11} & \cdots & a_{1n}, b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}, b_{m1} & \cdots & a_{mn}, b_{mn} \end{pmatrix}$$

Jak to může dopadnout? Hra může mít

(a) jeden sedlový prvek – optimální strategie získáme přímo. Například v následující matici označíme červeně největší prvek v každém sloupci matice A a největší prvek v každém řádku matice B a vidíme, že nalezneme právě jeden sedlový prvek.

$$\begin{pmatrix} 3,4 & 4,2 & 1,1 \\ \boxed{5,6} & 3,6 & 6,5 \\ 1,4 & 2,5 & 3,3 \end{pmatrix}$$

(b) více sedlových prvků – na rozdíl od antagonistického konfliktu zde ale nemusí být pro oba sedlové prvky stejné hodnoty výplatních funkcí. Pokud je jeden sedlový prvek dominovaný druhým, pak tento prvek přímo určuje rovnovážné řešení v ryzích strategiích. Například v následující matici existují dva sedlové prvky, ale hráči zvolí strategie x_1, y_2, protože získají více, než kdyby zvolili strategie x_2, y_1.

$$\begin{pmatrix} 3,4 & \boxed{6,7} & 1,1 \\ \boxed{5,6} & 3,6 & 6,5 \\ 1,4 & 2,5 & 3,3 \end{pmatrix}$$

Pokud jsou sedlové prvky vzájemně nedominované, může to vést k problému. Například v následující matici by mohl první hráč zvolit druhý řádek a druhý hráč druhý sloupec, takže by oba získali méně.

$$\begin{pmatrix} 3,4 & \boxed{5,7} & 1,1 \\ \boxed{6,6} & 1,1 & 6,5 \\ 1,4 & 2,5 & 3,3 \end{pmatrix}$$

(c) žádný sedlový prvek: neexistuje rovnovážné řešení v ryzích strategiích.

Optimální strategii v tom případě hledáme pomocí smíšeného rozšíření. Základní věta dvojmaticových her totiž říká:

Každá dvojmaticová hra má alespoň jedno rovnovážné řešení (ve smíšených strategiích).

Pomocí smíšeného rozšíření zjistíme, s jakou pravděpodobností budou hráči hrát jednotlivé strategie.

SMÍŠENÉ ROZŠÍŘENÍ

Úlohu smíšeného rozšíření bimaticové hry řešíme následovně:

První hráč bude hrát každou ze svých strategií s pravděpodobností ≥ 0 a součet pravděpodobností musí být roven 1. Totéž platí pro druhého hráče

$X = \{\mathbf{x}; \mathbf{x}^\mathbf{T} = (x_1; x_2; \dots; x_m); \quad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

$Y = \{\mathbf{y}; \mathbf{y}^\mathbf{T} = (y_1; y_2; \dots; y_n); \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$

Hodnota výplatní funkce prvního hráče je rovna:

$$f_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Hodnota výplatní funkce druhého hráče je rovna:

$$f_2(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i b_{ij} y_j = \mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{B}\mathbf{y}$$

Podle ZVDMH existují optimální strategie ($\mathbf{x}^\mathbf{o}$, $\mathbf{y}^\mathbf{o}$) ve smíšeném rozšíření, neboli existuje Nashova rovnováha, kdy první hráč získá $\mathbf{x}^{\mathbf{o}\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^\mathbf{o}$ a druhý hráč získá $\mathbf{x}^{\mathbf{o}\mathbf{T}}\mathbf{B}\mathbf{y}^\mathbf{o}$.

Problém povede na úlohu kvadratického programování. Jaké budou její omezující podmínky? Víme, že pro optimální řešení musí platit:

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{\mathbf{o}} \leq \mathbf{x}^{\mathbf{o}\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^{\mathbf{o}}$$

$$\mathbf{x}^{\mathbf{o}\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{y} \leq \mathbf{x}^{\mathbf{o}\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{y}^{\mathbf{o}}$$

Hledáme tedy $(\mathbf{x}^{\mathbf{o}}, \mathbf{y}^{\mathbf{o}})$ splňující uvedené nerovnosti a dojdeme k následující úloze:

- účelová funkce: max $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\mathbf{q} - \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{p} - \mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}$
  za podmínek:
  $\mathbf{A}\mathbf{q} \leq \mathbf{e}$
  $\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{p} \leq \mathbf{f}$
  $\mathbf{p} \geq \mathbf{0}$
  $\mathbf{q} \geq \mathbf{0}$

kde **e**, **f** jsou vektory jedniček. V maticích A, B musí být obdobně jako u maticové hry kladná čísla.

- Zpětná substituce
    - $y^{o}{}_{j} = \frac{q_j}{\sum_{j=1}^{n} q_j}$ neboli $\mathbf{y}^{\mathbf{o}} = \frac{\mathbf{q}}{\mathbf{f}^{\mathrm{T}}\mathbf{q}}$

      $x^{o}{}_{i} = \frac{p_i}{\sum_{i=1}^{m} p_i}$ neboli $\mathbf{x}^{\mathbf{o}} = \frac{\mathbf{p}}{\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{p}}$

Tím tedy zjistíme, s jakou pravděpodobnostní by měli hráči hrát jednotlivé strategie. Jde o úlohu kvadratického programování, takže pozor na to, že software může dojít k různým řešením podle toho, jaké nastavíme výchozí řešení.

TYPICKÉ KONFLIKTY

Vězňovo dilema: dva vězni jsou odděleně uvězněni, nemohou se tedy domlouvat, co udělají. Každý má možnost se přiznat nebo nepřiznat. Pokud se první přizná a druhý ne, dostane první nižší trest (nebo bude volný) a druhý dostane vyšší trest. Nepřiznají-li se oba, dostanou oba nižší trest. Přiznají-li se oba, dostanou oba vyšší trest. První vězeň uvažuje následovně: jestliže se druhý vězeň přizná, bylo by pro něj výhodnější se přiznat, protože by dostal nižší trest. Jestliže se nepřizná, bylo by pro něj také výhodnější se přiznat. Stejně přemýšlí i druhý vězeň. Postupem uvedeným výše najdeme sedlový bod:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} \textit{přiznat} & \textit{nepřiznat} \end{array} \\ \begin{array}{c} \textit{přiznat} \\ \textit{nepřiznat} \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{-6, -6} & 0, -10 \\ -10, 0 & -2, -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zdá se, že optimální je, když se oba přiznají. Přitom pokud by se ani jeden nepřiznal, dopadli by oba lépe. Je to tedy rovnovážné řešení, ale není Paretovsky rovnovážné (na rozdíl od zbylých tří), protože pro něj platí, že si někdo může polepšit, aniž by si někdo jiný pohoršil. V ekonomii se podobná situace objevuje například u kartelových dohod. Konflikt ukazuje, že když se všechny osoby chovají tak, aby maximalizovaly svůj užitek, mohou si nakonec všichni pohoršit.

Konflikt Kuře: Dvě auta jedou proti sobě. Ten, kdo uhne, je „kuře" a jeho reputace klesne. Pokud neuhne ani jeden, dopadne to špatně. Pokud uhnou oba, jsou oba slabí a jejich reputace se nezvýší. V matici budou dva vzájemně nedominované sedlové body, proto může situace skončit tragicky: první řidič zvolí druhý řádek a druhý řidič druhý sloupec, takže neuhne ani jeden a srazí se.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} uhne & neuhne \end{array} \\ \begin{array}{c} uhne \\ neuhne \end{array} & \begin{pmatrix} 0,0 & \boxed{-1,1} \\ \boxed{1,-1} & \mathbf{-2,-2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Manželský spor BoS (Bach or Stravinski, Battle of Sexes): jde o konflikt se stejným problémem jako Kuře (dva vzájemně nedominované sedlové body). Manželé jdou večer na koncert a rozhodují se mezi Bachem a Stravinským. Muž preferuje Bacha, žena Stravinského, oba chtějí jít na koncert a chtěli by jít spolu, ale řekněme, že se nemají možnost dohodnout, kam jít, protože manžel omylem nechal mobil doma (kdyby se dohodnout mohli, šlo by už o model vyjednávání. Pokud spolu nepůjdou, nebudou mít žádný užitek. V matici jsou opět dva nedominované sedlové body, takže by to mohlo dopadnout tak, že muž půjde na Bacha a žena na Stravinského, a každý skončí jinde s užitkem 0.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} Bach & Stravinski \end{array} \\ \begin{array}{c} Bach \\ Stravinski \end{array} & \begin{pmatrix} \boxed{2,1} & \mathbf{0,0} \\ 0,0 & \boxed{1,2} \end{pmatrix} \end{array}$$

Problém několika vzájemně nedominovaných prvků řeší tzv. **ústřední rovnováha**: pokud je dána jakási nápověda, který z rovnovážných bodů zvolit, hráči ho zvolí (například pokud jde o poslední koncert Bacha ve městě nebo pokud řidič v konfliktu Kuře utrhne volant a vyhodí ho z okna).

ZDROJE

Mgr. Jana Sekničková, Ph. D.: prezentace k předmětu 4EK421 Teorie her a ekonomického rozhodování, 2013.