FORMULACE SPECIÁLNÍCH PODMÍNEK V OPTIMALIZAČNÍCH MODELECH

LINEARIZACE PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ FUNKCE, NEKONVEXNÍ MNOŽINA PŘÍPUSTNÝCH ŘEŠENÍ, ÚLOHY VÝROBNÍHO PLÁNOVÁNÍ (ÚLOHA S FIXNÍMI NÁKLADY, MODELOVÁNÍ DISKRÉTNÍ ÚROVNĚ VÝROBY A URČITÉHO POČTU DRUHŮ VÝROBKŮ).

PO ČÁSTECH LINEÁRNÍ FUNKCE

Uvažujme po částech lineární funkci. Tato funkce je definována na intervalu $<a_1, a_r>$, který se rozpadá na intervaly $<a_1,a_2>,<a_2,a_3>,\dots<a_{r-1},a_r>$. V těchto intervalech je funkce lineární a v krajních bodech intervalů nabývá předepsaných hodnot.

Každý bod z daného intervalu bude tedy lineární kombinací krajních bodů intervalu:

$y = \lambda_i a_i + \lambda_{i+1} a_{i+1}$, kde $\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$, $\lambda_i, \lambda_{i+1} \geq 0$

Protože jde o po částech lineární funkce, bude i funkční hodnota tohoto bodu lineární kombinací funkčních hodnot krajních bodů intervalu, kam bod spadá:

$f(y) = \lambda_i f(a_i) + \lambda_{i+1} f(a_{i+1})$ kde $\lambda_i + \lambda_{i+1} = 1$, $\lambda_i, \lambda_{i+1} \geq 0$

Zavedeme binární proměnné x_i, které se budou rovnat 1 v případě, že bude bod spadat do intervalu $<a_i, a_{i+1}>$. Protože bod může spadat pouze do jednoho intervalu, musí být součet všech x_i roven 1. λ_1 může být nenulové pouze v tom případě, že bod spadá do intervalu $<a_1, a_2>$. To zajistíme přidáním podmínky $\lambda_1 \leq x_1$. λ_2 může být nenulové pouze v tom případě, že bod spadá do jednoho z intervalů $<a_1, a_2>$, $<a_2, a_3>$. To zajistíme přidáním podmínky $\lambda_2 \leq x_1 + x_2$. Totéž musí platit pro všechna λ_i. Celý model má tedy následující tvar: Máme dané intervaly $<a_1,a_2>,<a_2,a_3>,\dots<a_{r-1},a_r>$a funkční hodnoty krajních bodů těchto intervalů $f(a_1)$, $f(a_2)$…

$y = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i a_i$	*(1) Bod z intervalu $<a_i,a_{i+1}>$ je lineární kombinací krajních bodů tohoto intervalu.*
$f(y) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i f(a_i)$	*(2) Funkční hodnota bodu z intervalu $<a_i,a_{i+1}>$ je lineární kombinací funkčních hodnot krajních bodů tohoto intervalu.*
$\sum_{i=1}^{r-1} x_i = 1, \ \ x_i \in \{0,1\}$	*(3) x_i je rovno 1, pokud bod y spadá do intervalu $<a_i,a_{i+1}>$. Bod může spadat pouze do jednoho intervalu, proto je součet x_i roven 1.*
$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = 1, \ \ \lambda_i \geq 0$	*(4) λ_i je z intervalu $<0,1>$.*
$0 \leq \lambda_1 \leq x_1$	*(5) Jen pokud je y z intervalu $<a_1,a_2>$, může být λ_1 nezáporné. Jinak bude $x_1 = 0$, a λ_1 tím pádem také.*
$0 \leq \lambda_2 \leq x_1 + x_2$	*(6) Jen když je y z intervalu $<a_1,a_2>$ či $<a_2,a_3>$, může být λ_2 nezáporné.*
…	
$0 \leq \lambda_r \leq x_{r-1}$	

Příklad: mějme intervaly <0;25> a <25,50>. Víme, že $f(0) = 10$, $f(25) = 30$ a $f(50) = 20$.
$y = 0\lambda_1 + 25\lambda_2 + 50\lambda_3$
$f(y) = 10\lambda_1 + 30\lambda_2 + 20\lambda_3$
$x_1 + x_2 = 1$, $x_1, x_2 \in \{0,1\}$
$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \geq 0$
$0 \leq \lambda_1 \leq x_1$
$0 \leq \lambda_2 \leq x_1 + x_2$
$0 \leq \lambda_3 \leq x_2$

Lenka Fiřtová (2014)

NEKONVEXNÍ MNOŽINA PŘÍPUSTNÝCH ŘEŠENÍ

Nekonvexní množina přípustných řešení se opět řeší pomocí zavedení binárních proměnných. Uvažujme například následující soustavu omezujících podmínek:

$y_1 + y_2 \leq 4$

$y_1 \geq 1$ nebo $y_2 \geq 1$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$

Zavedeme dvě binární proměnné x_1, x_2.

- ➔ x_1 bude rovna 1 v případě, že $y_1 \geq 1$, jinak bude rovna 0. Proto musí platit, že $y_1 \geq x_1$.
- ➔ x_2 bude rovna 1 v případě, že $y_2 \geq 1$, jinak bude rovna 0. Proto musí platit, že $y_2 \geq x_2$.

Alespoň jedna z proměnných x_1, x_2 musí být tudíž rovna 1, ale vzhledem k zadání omezujících podmínek mohou být nenulové i obě. Jejich součet tedy musí být větší nebo roven 1.

Celý model bude mít tvar:

$y_1 + y_2 \leq 4$

$y_1 \geq x_1$

$y_2 \geq x_2$

$x_1 + x_2 \geq 1$

$x_1, x_2 \in \{0,1\}$

$y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$

PLATNOST RŮZNÝCH SOUSTAV OMEZUJÍCÍCH PODMÍNEK

Uvažujme situaci, kdy můžeme ve výrobě použít dvě různé technologie (jednu z nich či obě zároveň), a z toho plynou i dvě soustavy omezujících podmínek v závislosti na zvolené technologii. Například vyrábíme dva výrobky y_1, y_2.

Máme účelovou funkci $z = 7y_1 + 5y_2 \rightarrow$ max a následující omezující podmínky:

$y_1, y_2 \geq 0$

Při první technologii:

$5y_1 + y_2 \leq 10$

$y_1 + y_2 \leq 5$

Při druhé technologii:

$5y_1 + 6y_2 \leq 12$

$2y_1 + 2y_2 \leq 11$

Opět zavedeme binární proměnné x_1, x_2. x_1 se bude rovnat 1 v případě, že použijeme první technologii, x_2 se bude rovnat 1 v případě, že použijeme druhou technologii. Do modelu musíme přidat takové omezující podmínky, aby omezení vyplývající z používání dané technologie byla omezující pouze tehdy, pokud tuto technologii skutečně používáme. Celý model bude mít následující tvar:

$z = 7y_1 + 5y_2 \rightarrow$ max	*Účelová funkce.*
$y_1, y_2 \geq 0$	*(1) Vyrábíme nezáporný počet výrobků.*
$x_1, x_2 \in \{0,1\}$	*(2) Používáme i-tou technologii?*
$5y_1 + y_2 \leq 10 + M(1 - x_1)$	*(3) M je velké číslo. Když bude x_1 rovno 0 (nepoužíváme technologii 1) bude podmínka splněna vždy (nebude tedy omezující). V opačném případě se redukuje na $5y1 + y2 \leq 10$. Analogicky formulujeme následující podmínky.*
$y_1 + y_2 \leq 5 + M(1 - x_1)$	*(4)*
$5y_1 + 6y_2 \leq 12 + M(1 - x_2)$	*(5)*
$2y_1 + 2y_2 \leq 11 + M(1 - x_2)$	*(6)*
$x_1 + x_2 \geq 1$	*(7) Používáme alespoň jednu z obou technologií.*

SPECIÁLNÍ OMEZENÍ NA ÚROVEŇ VÝROBY

Uvažujme situaci, kdy se výrobek *y* nevyrábí vůbec, nebo se vyrábí pouze v množství 500 až 1000 ks.

Zavedeme binární proměnnou x, která bude rovna 1 v případě, že se výrobek vyrábí. K modelu přidáme omezující podmínku:

$500x \leq y \leq 1000x$

DISKRÉTNÍ ÚROVEŇ VÝROBY

Uvažujme situaci, kdy můžeme vyrábět pouze určité množství výrobku y, například 0 ks, 500 ks, 2 000 ks či 10 000 ks. Zavedeme binární proměnné, které budou rovny 1, pokud se bude výrobek vyrábět v daném množství:

x_1 = 1, pokud budeme vyrábět 500 ks, jinak 0

x_2 = 1, pokud budeme vyrábět 2 000 ks, jinak 0

x_3 = 1, pokud budeme vyrábět 10 000 ks, jinak 0

K modelu přidáme podmínky:

$y = 500x_1 + 2000x_2 + 10000x_3$

$x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$ *Musí se vyrábět jen jedno z povolených množství, nebo se nevyrábí nic.*

$x_1,, x_2, x_3, \epsilon \{0,1\}$

```
Podnikatel má dva stánky, v nichž prodává plastové klíčenky ve tvaru slepice
v ceně 100 Kč. Oba stánky mohou být otevřené od 8:00 do 20:00, je-li přítomen
brigádník, který slepice prodává. Protože slepice nejdou moc na odbyt, najal
podnikatel schopné a přesvědčivé brigádníky Lojzu a Páju, kterým by se mohlo
podařit něco prodat. Z minulých zkušeností podnikatel ví, že Lojza v průměru
prodá 3 slepice za hodinu, Pája dokonce 4 slepice za hodinu. Pája, vědom si
svých kvalit, požaduje vyšší mzdu. Lojzovi tak podnikatel platí 70 Kč/hod,
Pájovi 120 Kč/hod. Denně podnikatel na mzdách nemůže utratit více než 1500
Kč. Kolik hodin mají být jednotliví brigádníci v práci, víme-li, že Pája tam
chce být pouze 4 nebo 8 nebo 12 hodin a Lojza alespoň 5, ale nejvýše 10 hodin?
Cílem je maximalizovat tržbu z prodaných slepic.
x1 – počet hodin, kdy je Lojza v práci
x2 – počet hodin, kdy je Pája v práci
y  – binární proměnná: bude Lojza v práci?
z  – binární proměnná: bude Pája v práci

max=300*x1+400*x2; !maximalizujeme průměrnou očekávanou tržbu;
70*x1+120*x2<=1500; !podnikatel může na mzdách utratit maximálně 1500 Kč;
@gin(x1);
@gin(x2);
@bin(y); !bude Lojza v práci?
x1>=5*y; !pokud bude Lojza v práci, musí tam být aspoň 5 hodin a nejvýše 10
hodin;
x1<=10*y;
@bin(z1); !bude Pája v práci?;
@bin(z2);
@bin(z3);
z1+z2+z3<=1;
x2=4*z1+8*z2+12*z3; !Pája bude v práci 0, 4, 8 nebo 12 hodin;

Lojza by měl být v práci 7 hodin a Pája 8 hodin. Podnikatel může očekávat,
že průměrně prodají 53 plastových klíčenek ve tvaru slepice a celková tržba
bude 5 300 Kč.
```

VÝROBA URČITÉHO POČTU DRUHŮ VÝROBKŮ

Uvažujme situaci, kdy máme 8 různých výrobků, které můžeme vyrábět: V_1, $V_2 \ldots V_8$. Chceme však vyrábět právě 3 z nich, a to v maximálním množství z_1, $z_2 \ldots z_8$. Zavedeme opět binární proměnné xi, které budou rovny 1 v případě, že se bude výrobek V_i vyrábět.

K modelu přidáme podmínky:

$\sum_{i=1}^{8} x_i = 3$		*Celkem se vyrábí právě 3 výrobky.*
$x_i \in \{0,1\}$, $y_i \geq 0$	$i = 1,2 \ldots 8$	*Vyrábí se i-tý výrobek? Pokud ano, musí jít o nezáporné množství.*
$x_i \leq y_i \leq z_i x_i$	$i = 1,2 \ldots 8$	*Pokud se výrobek vyrábí, musí být vyráběné množství nejvýše z_i.*

Pokud bychom navíc chtěli, aby se množství všech vyráběných výrobků rovnalo, museli bychom přidat ještě následující podmínku:

$-M(1 - x_i) \leq y_i - y \leq M(1 - x_i) \quad i = 1,2 \ldots 8$

M značí velké číslo, y značí počet vyráběných výrobků – musí být nenulový.
Pokud se i-tý výrobek nevyrábí, podmínka je splněna vždy, neboť bude platit: $-M \leq y_i - y \leq M$
Pokud se i-tý výrobek vyrábí, bude se množství rovnat y, neboť bude platit: $y \leq y_i \leq y$

```
!Podnik se má rozhodnout, které tři výrobky z pěti navrhovaných začne
vyrábět, přičemž chce maximalizovat svůj zisk. Zisk z výrobku V1 je 12 Kč,
z V2 je 10 Kč, z V3 je 16 Kč, z výrobku V4 je 15 Kč a z V5 je 13 Kč. Máme
dva druhy surovin v množství 600 a 450 jednotek, ze kterých se výrobky
vyrábějí. Na výrobu výrobku potřebujeme:
  S1 S2
V1 2 3
V2 4 2
V3 3 1
V4 5 2
V5 3 2
Výrobky mají také omezení, v jakém množství mohou být maximálně vyráběny a
to: 30, 50, 70, 100 a 90.;

max=12*y1+10*y2+16*y3+15*y4+13*y5;
2*y1+4*y2+3*y3+5*y4+3*y5<=600;
3*y1+2*y2+y3+2*y4+2*y5<=450;
@bin(x1);@bin(x2);@bin(x3);@bin(x4);@bin(x5);
@gin(y1);@gin(y2);@gin(y3);@gin(y4);@gin(y5);
x1+x2+x3+x4+x5=3;
y1<=30*x1;
y2<=50*x2;
y3<=70*x3;
y4<=100*x4;
y5<=90*x5;
Budeme vyrábět třetí, čtvrtý a pátý výrobek, a to v maximálním možném
množství.
Zdroj: Ing. Jan Fábry, Ph.D.: 4EK314 Diskrétní modely
```

MINIMUM Z PROMĚNNÝCH

Uvažujme situaci, kdy má být proměnná *y* rovna minimu z hodnot proměnných y_1, y_2, y_3.

Zavedeme binární proměnné x_1, x_2, x_3:
x_1 se bude rovnat 1, pokud bude y rovno y_1, jinak 0.
x_2 se bude rovnat 1, pokud bude y rovno y_2, jinak 0.
x_3 se bude rovnat 1, pokud bude y rovno y_3, jinak 0.

K modelu přidáme následující podmínky:

$x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$	*Proměnná y se bude rovnat alespoň jedné z proměnných y_1, y_2, y_3. Pokud jich bude mít více tutéž hodnotu, která bude zároveň minimem, pak bude omezení splněno jako nerovnost.*
$y \leq y_1 \leq y + M(1 - x_1)$	*Pokud bude minimem z proměnných y_1, y_2, y_3 právě y1, pak platí, že $y = y_1$ a $x_1 = 1$. Podmínka bude mít tudíž tvar $y \leq y_1 \leq y$. V opačném případě se podmínka redukuje na $y \leq y_1$ (jelikož je y rovno minimu z proměnných, žádná z proměnných y_1, y_2, y_3 nemůže být menší). Další dvě podmínky jsou analogické.*
$y \leq y_2 \leq y + M(1 - x_2)$	
$y \leq y_3 \leq y + M(1 - x_3)$	

SOUČIN BIVALENTNÍCH PROMĚNNÝCH

Máme tři bivalentní proměnné x_1,x_2,x_3. Jak zapsat pomocí lineárních omezení účelovou funkci $z = x_1x_2x_3$? Zavedeme další bivalentní proměnnou x_{123}, která se bude rovnat 1 v případě, že $x_1 = x_2 = x_3 =$ 1, jinak 0. Omezení pak zapíšeme následovně:

$(x_1 + x_2 + x_3) - 2 \leq x_{123} \leq ⅓(x_1 + x_2 + x_3)$

Díky této podmínce bude x_{123} rovno jedné pouze v případě, že $x_1 = x_2 = x_3 = 1$. Pak můžeme účelovou funkci psát jako:

$z = x_{123}$

ZÁPIS CELOČÍSELNÉ PROMĚNNÉ POMOCÍ BIVALENTNÍCH PROMĚNNÝCH

Máme celočíselnou proměnnou *x* z intervalu <0; 31>. Jak zapíšeme tuto proměnnou pomocí lineárního výrazu ve dvojkovém tvaru? Zavedeme bivalentní proměnné x_0, x_1, x_2, x_3, x_4. Podmínku zapíšeme takto:

$x = x_0 2^0 + x_1 2^1 + x_2 2^2 + x_3 2^3 + x_4 2^4$

ÚLOHA S FIXNÍMI NÁKLADY

Uvažujme situaci, kdy jsou s výrobou určitého výrobku spojeny fixní náklady bez ohledu na vyráběné množství. To musí být zohledněno jak v účelové funkci, tak v omezujících podmínkách. Cílem je najít optimální strukturu výroby. Označíme y_i množství i-tého výrobku. Zavedeme binární proměnné x_i, které budou rovny 1 v případě, že se *i*-tý výrobek vyrábí.

Například mějme následující příklad:

	V_1	V_2	kapacita
Surovina 1	2	3	450
Surovina 2	1	2	200
zisk (tis.Kč)	5	8	
fixní *N* (tis.Kč)	30	45	

Zdroj: Ing. Jan Fábry, Ph.D.: 4EK314 Diskrétní modely

Model formulujeme následovně:

$5y_1 + 8y_2 - 30x_1 - 45x_2 \rightarrow max$	*Účelová funkce je rozdílem celkového zisku a fixních nákladů. Pokud se výrobek nevyrábí, $x_i = 0$ a fixní náklady budou nulové.*
$2y_1 + 3y_2 \leq 450$	*(1) Omezující podmínka – první surovina.*
$1y_1 + 2y_2 \leq 200$	*(2) Omezující podmínka – druhá surovina.*
$y_1, y_2 \geq 0$	*(3) Nelze vyrábět záporné množství.*
x_1, x_2 – bivalentní	*(4) Vyrábí se i-tý výrobek?*
$\frac{1}{M}x_1 \leq y_1 \leq 200x_1$	*(5) Pokud nevyrábíme první výrobek, pak bude díky této podmínce y_1 rovno 0. Pokud jej vyrábíme, musíme vyrábět alespoň nějaké nepatrné množství (M je velké číslo). Co se týče pravé strany, nemůžeme vyrábět určitě více než 200, jak vyplývá z omezení (2).*
$\frac{1}{M}x_2 \leq y_2 \leq 100x_2$	*(5) Pokud nevyrábíme druhý výrobek, pak bude díky této podmínce y_2 rovno 0. Pokud jej vyrábíme, musíme vyrábět alespoň nějaké nepatrné množství (M je velké číslo). Co se týče pravé strany, nemůžeme vyrábět určitě více než 100, jak vyplývá z omezení (2).*

```
!Podnik vyrábí výrobky A a B. Z odbytových důvodů máme omezení na jejich
výrobu: výrobku A se nesmí vyrobit více než 200 t, výrobku B víc než 350 t.
Při výrobě se používají suroviny S1 a S2, jejich kapacita je 400 t a 560 t.
Na výrobu 1 t výrobku A je potřeba 2 t suroviny S1 a 1 t suroviny S2, na
výrobu 1 t výrobku B je potřeba 3 t suroviny S1 a 2 t suroviny S2. Zisk z 1
t výrobku A je 3500 Kč, z 1 t výrobku B 4000 Kč. Při výrobě výrobku A
vznikají fixní náklady 20000 Kč, výrobku B 30000 Kč. Cílem je maximalizovat
celkový zisk (po odečtení fixních nákladů).;

model:
sets:
vyrobky/A,B/:zisk,fixninaklady,maximum,x,y; !x = bude se vyrábět? y = kolik
ho vyrábět?;
suroviny/S1,S2/:kapacita;
spotreba(suroviny,vyrobky): A;
endsets

data:
A =
2 3
1 2;

zisk = 3500 4000;
maximum = 200 350;
kapacita = 400 560;
fixninaklady = 20000 30000;
enddata

max = @sum(vyrobky(j): y(j)*zisk(j)) - @sum(vyrobky(j):
x(j)*fixninaklady(j));
@for(vyrobky: @bin(x));
@for(vyrobky: @gin(y));
@for(suroviny(i): @sum(vyrobky(j): y(j)*A(i,j)) <=kapacita(i));
@for(vyrobky(j): y(j) <=x(j)* maximum(j)); !když se bude výrobek j vyrábět,
vyrobíme ho aspoň 1ks, jinak 0ks;
@for(vyrobky(j): y(j) >= 0.001*x(j));
End

Budeme vyrábět pouze výrobek A v počtu 200 kusů.
```

Příklad – ukázka různých omezujících podmínek a účelových funkcí

Zadání

Maminka se na Štědrý den ráno vzbudila a uvědomila si, že zapomněla upéct cukroví. Rodina jí to nemá za zlé, maminka totiž pracuje v oblasti vědy a výzkumu, a někdy bývá bohužel poněkud roztržitá. Naštěstí díky své profesi dobře ovládá optimalizaci při zadaných omezeních, takže si jistě poradí i s tím, že všechny obchody už jsou zavřené a ona má doma jen kilo mouky, kostku másla (750 g), půl kila cukru, 200 g ořechů a jedno balení vajec po šesti, takže nemůže upéct všechno, co dělá každý rok. Běžně totiž peče osm druhů po jedné várce, přičemž potřebuje následující suroviny:

Vanilkové rohlíčky: 350 g polohrubé mouky, 250 g tuku, 100 g cukru, 140 g ořechů, cukr moučka s vanilkou na obalování
Kokosky: Těsto: 250 g hladké mouky, 500 g kokosu, 250 g másla, 200 g moučkového cukru, 2 vejce
Linecké: 25 dkg hladké mouky, 13 dkg moučkového cukru, 15 dkg tuku, 1 vejce, půl prášku do pečiva
Vosí hnízda: těsto: 16 dkg piškotů, 15 dkg moučkového cukru, 9 dkg másla, 2 lžíce kakaa, 3 lžíce rumu, 2 lžíce mléka, krém: 10 dkg másla, 8 dkg cukru, 1 vejce
Mandlové věnečky: Těsto: 250 g másla, 250 g moučkového cukru, 250 g hladké mouky, 125 g mletých mandlí, 1 vanilinový cukr, 1 vejce, 2 kávové lžičky prášku do pečiva
Ovocné placičky: Těsto: 15 dkg hladké mouky, 5 dkg moučkového cukru, 10 dkg tuku, 1 žloutek
Pomazánka: 2 bílky, na drobno nasekané kandované ovoce a mandle
Oříškové trubičky: 35 dkg hladké mouky, 15 dkg moučkového cukru, 18 dkg Hery, 1 menší celé vejce a 1 žloutek, 7 dkg nastr. vlašských ořechů, 1 zarovnaná lžíce kakaa
Černé kuličky: 125 g másla, 100 g cukru, 1 lžíce kakaa, 150 g čokolády na vaření, 1-2 lžíce koňaku

Další suroviny s výjimkou mouky, másla, cukru, ořechů a vajec (koňak, kakao atd.) má v dostatečném množství. Zásadně odmítá péct méně než celou várku, protože nemá dost času na to, aby špinila pořád dokola nádobí a dělala různé směsi.

Následující tabulka zachycuje potřebu surovin (v gramech / kusech) na dané typy a také počty kousků, které vzniknou přibližně z jedné várky.

DRUH	mouka	máslo	cukr	ořechy	vejce	ks
Vanilkové rohlíčky	350	250	100	140	0	**60**
Kokosky	250	250	200	0	2	**60**
Linecké	250	150	130	0	1	**40**
Vosí hnízda	0	190	230	0	1	**30**
Mandlové věnečky	250	250	250	125	1	**60**
Ovocné placičky	150	100	50	0	2	**30**
Oříškové trubičky	350	180	150	70	2	**50**
Černé kuličky	0	125	100	0	0	**20**

Potřeba	1600	1495	1210	335	9
Zásoby	1000	750	500	200	6

Maminka svolala rodinnou poradu a zeptala se, jaké cukroví upéct. Ukázalo se, že každý člen rodiny má jiné požadavky:

1. Maminka chce, aby cukroví bylo co nejvíce kousků, bez ohledu na druh. Přeje si, aby bylo dost pro všechny.
2. Babička chce, aby cukroví bylo co nejvíce druhů, bez ohledu na kousky. Nesouhlasí s maminkou ohledně požadavku péct celé várky a tvrdí, že by se stihly připravit i várky poloviční. Nerada by totiž, aby vypadalo hloupě před návštěvami, že mají málo druhů.
3. Tatínek souhlasí s maminkou, že by mělo být co nejvíce kusů, ale zároveň požaduje, aby byla aspoň jedna várka hnízd a kuliček, v nichž je alkohol, takže mu chutnají nejvíce, a zároveň aby dohromady hnízda a kuličky tvořily aspoň polovinu upečeného cukroví, co se týče počtu kusů.
4. Dceru nezajímá počet kusů ani druhů, ale cukroví má ohodnocené podle oblíbenosti a chce, aby se upeklo co nejvíce toho, co jí chutná. Její subjektivní hodnocení je následující (5 = max, 1 = min): rohlíčky 1, kokosky 4, linecké 2, hnízda 5, věnečky 4, placičky 3, trubičky 5, kuličky 1.

Které cukroví tedy upéct?

Model

```
model:
sets:
cukrovi/rohlicky,kokosky,linecke,hnizda,venecky,placicky,trubicky,kulicky/:
varka,ks,hodnoceni,x,druh;
suroviny/mouka,maslo,cukr,orechy,vejce/:zasoby;
vyroba(cukrovi,suroviny):spotreba;
endsets

data:
spotreba =
350   250   100   140   0
250   250   200   0     2
250   150   130   0     1
0     190   230   0     1
250   250   250   125   1
150   100   50    0     2
350   180   150   70    2
0     125   100   0     0;
ks = 60 60 40 30 60 30 50 20;
zasoby = 1000 750 500 200 6;
hodnoceni = 1 4 2 5 4 3 5 1;
enddata

!MAMINKA;
max=@sum(cukrovi:ks*varka);
@for(suroviny(j):@sum(cukrovi(i): spotreba(i,j)*varka(i)) <= zasoby(j));
@for(cukrovi: @gin(varka));
end
!Podle maminky by se měla upéct jedna várka rohlíčků, kokosek, lineckého a
ovocných placiček.;

!BABIČKA;
max = @sum(cukrovi: druh );
@for(suroviny(j): @sum(cukrovi(i): spotreba(i,j)*varka(i)) <= zasoby(j));
@for (cukrovi: varka = 0.5*x);
@for(cukrovi: druh>=varka);
@for(cukrovi: druh<=2*varka);
@for(cukrovi: @bin(druh));
```

```
@for(cukrovi: @gin(x));
!Podle babičky by se mělo upéct půl várky od každého druhu kromě mandlových věnečků.;
!TATÍNEK;
@for(suroviny(j):@sum(cukrovi(i): spotreba(i,j)*varka(i)) <= zasoby(j));
@for(cukrovi: @gin(varka));
@sum(cukrovi(i): ks*varka) = Y;
max = Y;
@sum(cukrovi(i)| i#EQ#4: ks*varka) + @sum(cukrovi(i)| i#EQ#8: ks*varka) >= 0.5*Y;
@for(cukrovi(i)|i#EQ#4: varka>=1);
@for(cukrovi(i)|i#EQ#8: varka>=1);
!Podle tatínka se má péct jedna várka hnízd a placiček a dvě várky kuliček;.

!DCERA;
!viz maminka kromě účelové funkce:;
max = @sum(cukrovi: hodnoceni*varka*ks);
!nebo přidat atribut množiny cukroví „pocet" a;
max = @sum(cukrovi: hodnoceni*pocet);
@for(cukrovi: pocet = varka*ks);
!Podle dcery by se měla upéct jedna várka kokosek a dvě várky trubiček.;
```

Shrnutí

DRUH	M	B	T	D
Vanilkové rohlíčky	1	0,5		
Kokosky	1	0,5		1
Linecké	1	0,5		
Vosí hnízda		0,5	1	
Mandlové věnečky				
Ovocné placičky	1	0,5	1	
Oříškové trubičky		0,5		2
Černé kuličky		0,5	2	

	mouka	máslo	cukr	ořechy	vejce	ks	hodnocení	druhů
Maminka	1000	750	480	140	5	**190**	470	4
Babička	675	622,5	480	105	4	145	445	**7**
Tatínek	150	540	480	0	3	100	280	3
Dcera	950	610	500	140	6	160	**740**	2
Dispozice	1000	750	500	200	6			

Protože se, jak vyplývá z tabulek, rodina nemůže dohodnout, rozhodnou se nakonec najít kompromis. Upeče se taková „struktura" cukroví, která bude splňovat následující podmínky zadané jednotlivými členy a představující určité ústupky z jejich původních požadavků:

1. Maminka: Celkem musí být aspoň 150 ks cukroví.
2. Babička: Celkem musí být aspoň 4 druhy.
3. Maminka: Může se udělat poloviční várka, ale nejvýše jedna.
4. Tatínek: Nemusí se péct jak hnízda, tak kuličky, ale aspoň jedno z nich ano.
5. Dcera: Hodnocení cukroví musí být aspoň 550.
6. Maminka: Spotřebuje se přitom co nejméně surovin.

Finální model

```
model:
sets:
cukrovi/rohlicky,kokosky,linecke,hnizda,venecky,placicky,trubicky,kulicky/:
varka,ks,hodnoceni,x,y,druh;
suroviny/mouka,maslo,cukr,orechy,vejce/:zasoby;
vyroba(cukrovi,suroviny):spotreba;
endsets

data:
spotreba =
350   250   100   140   0
250   250   200   0     2
250   150   130   0     1
0     190   230   0     1
250   250   250   125   1
150   100   50    0     2
350   180   150   70    2
0     125   100   0     0;
ks = 60 60 40 30 60 30 50 20;
zasoby = 1000 750 500 200 6;
hodnoceni = 1 4 2 5 4 3 5 1;
enddata

min = @sum(vyroba(i,j): spotreba(i,j)*varka(i));
@for(suroviny(j):@sum(cukrovi(i): spotreba(i,j)*varka(i)) <= zasoby(j));

@sum(cukrovi: varka*ks)>=150;

@for(cukrovi: @bin(druh));
@for(cukrovi: druh<=2*varka);
@for(cukrovi: druh>=varka);
@sum(cukrovi: druh) >=4;

@for(cukrovi: varka = 0.5*x + 1*y);
@for(cukrovi: @gin(y));
@for(cukrovi: @bin(x));
@sum(cukrovi: x) <=1;

@sum(cukrovi(i)| i#EQ#4#OR#i#EQ#8: druh(i))>=1;

@sum(cukrovi: varka*ks*hodnoceni)>=550;


end
```

Výsledky:

Upeče se jedna várka kokosek, oříškových trubiček a ovocných placiček a půl várky černých kuliček.

1. Rodina bude mít 150 ks cukroví.
2. Cukroví budou 4 druhy.
3. Bude se péct právě 1 poloviční várka.
4. Připraví se jen jeden z druhů požadovaných tatínkem.
5. Cukroví bude dcerou ohodnocené body ve výši 590.
6. Spotřebuje se méně než 2 kg surovin (méně než v původní verzi maminky, babičky i dcery).

Výsledná výroba:




Zdroj:

Vánoční cukroví, recepty. Tipy na vánoční dárky. [cit. 2011-12-27]. Dostupné z: http://www.vanoce-vanocni-darky.cz/cukrovi-recepty#recepty-4

ZDROJE:

Ing. J. Fábry, Ph.D.: přednášky 4EK314 Diskrétní modely, 2011.