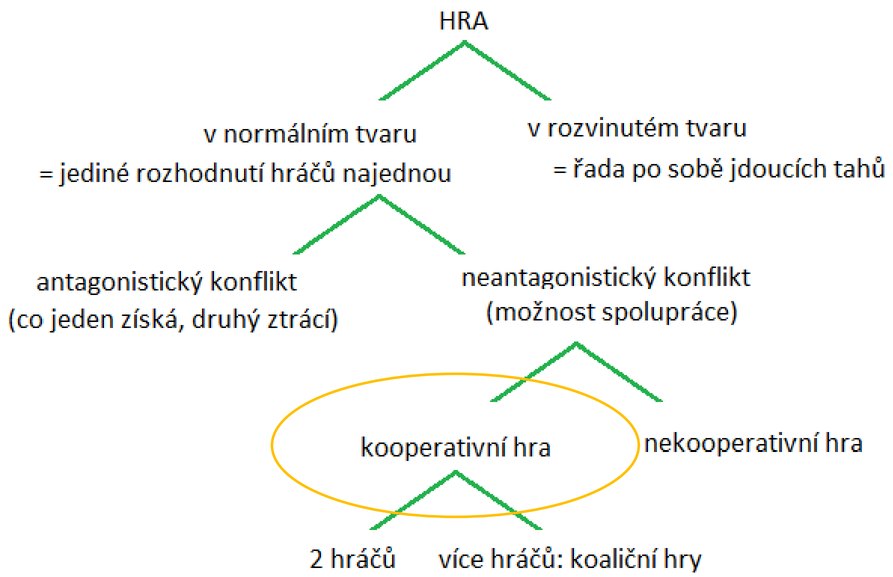
KOOPERATIVNÍ HRY

FORMULACE, KONCEPCE ŘEŠENÍ, JÁDRO HRY, HRA VE TVARU CHARAKTERISTICKÉ FUNKCE, SHAPLEYOVA HODNOTA

CO JE TO TEORIE HER A ČÍM SE ZABÝVÁ?

Teorie her je ekonomická vědní disciplína, která se zabývá studiem konfliktních situací. Konflikty bychom mohli zjednodušeně rozdělit takto:



JAK SI PORADIT S NEANTAGONISTICKÝM KONFLIKTEM?

Neantagonistický konflikt je takový konflikt, kdy zájmy hráčů nejsou v přímém protikladu (říkáme tomu hra s nekonstantním součtem). Výhra prvního hráče není prohrou druhého, někdy se jim tedy může vyplatit spolupracovat. Tyto hry rozdělujeme na kooperativní, kdy hráči mohou spolupracovat, je-li to pro ně výhodné, a nekooperativní, kdy spolupracovat nemohou.

Hra v normálním tvaru je dána:

- **množinou hráčů** $\{1, 2, \ldots, N\}$,
- **množinou prostorů strategií** $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$, kde X_i označuje prostor strategií i-tého hráče,
- **množinou výplatních funkcí** $\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$.

Předpokládáme, že tito hráči jsou inteligentní: snaží se maximalizovat svůj užitek (hodnotu výplatní funkce) a mají dokonalé informace o hře, tedy znají množinu hráčů, svůj prostor strategií a výplatní funkci a prostor strategií a výplatní funkci ostatních hráčů.

KOOPERATIVNÍ KONFLIKTY

Při kooperativních konfliktech předpokládáme, že hráči mají možnost se před hrou uzavřít závaznou dohodu a spolupracovat. To udělají, pokud je pro ně spolupráce výhodná, tedy pokud mají oba větší výhru, než kdyby nespolupracovali. Buď tedy hráči před hrou uzavřou dohodu a spolupracují, nebo dohodu neuzavřou a konkurují si (každý hraje sám).

KOOPERATIVNÍ HRA DVOU HRÁČŮ

Uvažujme nejprve jen dva hráče. Označme výhru prvního hráče, resp. druhého hráče při nespolupráci *v*(1), resp. *v*(2), a jejich celkovou výhru při spolupráci pak *v*(1,2). Výhodnost spolupráce mohou hráči posoudit porovnáním výhry při spolupráci se zaručenou výhrou, tedy s výhrou, kterou by získali, kdyby nespolupracovali. Můžou vzít v úvahu rovnovážnou nebo maximinovou zaručenou výhru.

Rovnovážnou zaručenou výhru berou hráči v úvahu tehdy, když očekávají, že oba případnou domluvu dodrží. V tom případě hráči porovnávají výhru při spolupráci s výhrou při volbě sedlového prvku, který by zvolili při nespolupráci.

Například mějme matici:

$$\begin{pmatrix} 1{,}5 & 4{,}2 & 2{,}3 \\ 2{,}2 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ \boxed{3{,}4} & 3{,}1 & 4{,}0 \end{pmatrix}, \text{ při spolupráci by výhry byly následující: } \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 4 & 10 & 5 \\ 7 & 4 & 4 \end{pmatrix}$$

Matici vpravo získáme součtem prvků matic pro jednotlivé hráče. Při nespolupráci by hráči zvolili sedlový prvek (Nashova rovnováha). Zaručená rovnovážná výhra prvního hráče by byla *v*(1) = 3. Zaručená rovnovážná výhra druhého hráče by byla *v*(2) = 4. Pokud by očekávali, že případnou dohodu oba dodrží, ptali by, jestli by při spolupráci mohli získat více než *v*(1) + *v*(2) = 3 + 4. Odpověď je ano: mohli by získat *v*(1,2) = 10. Spolupráce se jim vyplatí.

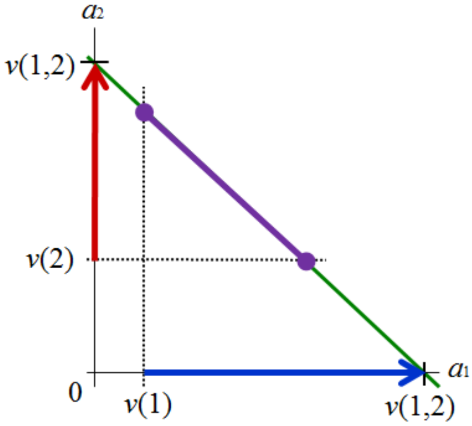
Maximinovou zaručenou výhru berou hráči v úvahu tehdy, když se obávají, že někdo dohodu poruší. V tom případě porovnává každý hráč výhru při spolupráci s výhrou za situace, kdy mu druhý hráč bude dělat to nejhorší, co může. Zaručená výhra 1. hráče $v(1) = \max_i \min_j a_{ij}$. Zaručená výhra 2. hráče $v(2) = \max_j \min_i b_{ij}$

$$\begin{array}{ccc|c} \multicolumn{3}{c|}{\begin{pmatrix} 1{,}5 & 4{,}2 & 2{,}3 \\ 2{,}2 & 1{,}9 & 1{,}4 \\ 3{,}4 & 3{,}1 & 4{,}0 \end{pmatrix}} & \begin{matrix} \rightarrow 1 \\ \rightarrow 1 \\ \rightarrow 3 \end{matrix} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ \boxed{2} & 1 & 0 & \end{array}$$

Maximinová zaručená výhra prvního hráče je *v*(1) = 3, maximinová zaručená výhra druhého hráče je *v*(2) = 2. Pokud by se hráči obávali, že někdo dohodu poruší, ptali by se, jestli mohou spoluprací získat víc, než kolik by dokázali získat, i kdyby jim protihráč dělal naschvály. Odpověď je opět ano: mohli by získat *v*(1,2) = 10. Spolupráce se jim vyplatí.

JÁDRO HRY

Pokud hráči zvolí spolupráci, musí se pak dohodnout, jak si výhru rozdělit. Celková výhra musí být rozdělena mezi hráče: $\boldsymbol{a_1 + a_2 = v(1,2)}$**,** 1. hráč musí dostat hodnotu a_1, která bude alespoň rovna zaručené výhře: $\boldsymbol{a_1} \geq \boldsymbol{v(1)}$ a 2. hráč musí dostat hodnotu a_2, která bude alespoň rovna zaručené výhře: $\boldsymbol{a_2} \geq \boldsymbol{v(2)}$. Všechny dvojice a_1, a_2, které toto splňují, tvoří tzv. **jádro hry**.



Jádro hry.
Zdroj: prezentace 4EK421 (Mgr. Jana Sekničková, PhD.)

Otázka je, který bod z jádra hry vybrat. Jednou z možností je dát prvnímu hráči jeho zaručenou výhru *v*(1), druhému hráči jeho zaručenou výhru *v*(2) a zbytek rozdělit mezi hráče rovným dílem:

$$a_1 = v(1) + \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{2}$$
$$a_2 = v(2) + \frac{v(1,2) - v(1) - v(2)}{2}$$

V příkladu výše za předpokladu, že hráči očekávají dodržení dohody, by první hráč musel dostat aspoň 3, druhý aspoň 4 a celkem by oba museli dostat 10. To, co je navíc, tedy 10 – (3 + 4), by si mohli rozdělit rovným dílem, takže první by mohl dostat 4,5 a druhý 5,5.

KOOPERATIVNÍ HRA VÍCE HRÁČŮ

Pokud máme ve hře více hráčů, je situace složitější: hráči se musí dohodnout, zda, s kým spolupracovat a proti komu spolupracovat. Mějme N hráčů a množinu hráčů označme **N** = {1,2,…N}.

Hráši vytvářejí koalice, což je neprázdná podmnožina **S** množiny hráčů **N**, v níž jsou hráči, kteří spolupracují při volbě strategií. Tato množina může být i jednoprvková, nebo ji naopak mohou tvořit všichni hráči („velká koalice“). Celkem existuje $2^N – 1$ koalic (2^N proto, že každý z N hráčů se rozhoduje mezi dvěma možnostmi, a to zda v koalici bude nebo ne, mínus jedna proto, že je potřeba odečíst prázdnou koalici, v níž nikdo není). Hráč může být členem 2^{N-1} koalic (N – 1 je tam proto, že každý hráč se rozhoduje, zda bude patřit do některé z koalic zbývajících N – 1 hráčů).

Koaliční hrou nazýváme kooperativní hru s více hráči (N > 2). Koaliční struktura je množina všech koalic tvořených v rámci hry. Řešením koaliční hry je tzv. optimální (rovnovážná) koaliční struktura. Obvykle předpokládáme kooperativní hry s tzv. volnou disjunktní koaliční strukturu: to znamená, že mohou vzniknout jakékoli koalice (i dejme tomu ODS + KSČM, = volná) a že hráč může být členem pouze jedné koalice (= disjunktní).
Například pro hráče A, B, C máme N = 3 hráče:

- ➔ může vzniknout $2^3 – 1 = 7$ koalic: A, B, C, AB, AC, BC, ABC
- ➔ hráč může být členem 2^2 koalic, např. hráč a může být členem koalice A, AB, AC, ABC
- ➔ koaliční struktura je například {A, B}, {C}

HRA VE TVARU CHARAKTERISTICKÉ FUNKCE

Pracuje se se **hrou ve tvaru charakteristické funkce** *v*, která je definována pro každou koalici **S** a přiřazuje každé koalici její výhru, tzn. *v*(**S**) je výhra koalice S. Dvojice (***N***, *v*) se nazývá kooperativní hrou *N* hráčů ve tvaru charakteristické funkce. Hodnota charakteristické funkce se odvíjí toho, jak se chovají hráči mimo koalici. Pokud volí hráči mimo koalici nejhorší možné strategie z pohledu dané koalice (dělají jí to nejhorší, co můžou), mluvíme o **maximinové reprezentaci charakteristické funkce**. Většinou se však pracuje spíše s předpokladem, že hráči volí rovnovážné strategie, tedy že hráči mimo koalici chtějí maximalizovat svůj zisk, ne trestat koalici, ve které nejsou. Pak mluvíme o **rovnovážné reprezentaci charakteristické funkce**.

Důležitou vlastností charakteristické funkce je **superaditivita**: charakteristická funkce je superaditivní, pokud pro každé dvě disjunktní koalice platí, že $v(S_1 \cup S_2) \geq v(S_1) + v(S_2)$, čili že když dvě podmnožiny hráčů vytvoří koalici, bude jejich výhra větší nebo alespoň stejně velká jako součet jejich výher v situaci, kdy by v koalici nebyli.

ROZDĚLENÍ VÝHRY MEZI HRÁČE

Kooperativní hry lze rozdělit na hry s konstantním součtem a nekonstantním součtem, podle toho, jestli je pro každou možnou koaliční strukturu součet výher všech utvořených koalic roven konstantně, nebo ne. Také je možno je rozdělit na hry s přenosnou a nepřenosnou výhrou. V prvním případě si hráči mohou celkovou výhru koalice přerozdělit mezi sebe, takže výhra jednotlivých hráčů závisí jak na zisku koalice, tak na dohodě o rozdělení celkové výhry. Ve druhém případě přerozdělení není možné.

Konečné rozdělení výhry mezi hráče má tvar vektoru (a_1, a_2…a_N). Uplatňují se zde dva principy: **princip kolektivní racionality** a **skupinové stability**. Princip kolektivní racionality vyjadřuje zájem hráčů na maximalizaci výhry koalice. Nejprve se sestaví koalice s nejvyšší celkovou výhrou. Jsou-li v koalici všichni hráči, byla nalezena koaliční struktura hry (tvoří ji velká koalice), v opačném případě sestavíme ze zbylých hráčů koalici s nejvyšší celkovou výhrou atd. až do nalezení úplné koaliční struktury hry. Princip skupinové stability vyjadřuje zájem jednotlivých hráčů či podskupin koalice na maximalizaci jejich vlastní výhry při přerozdělování uvnitř koalice. Aby byla koalice skupinově stabilní, musí být splněna dvě pravidla:

- ➔ celá výhra koalice musí být rozdělena mezi její členy: $v(S) = \sum_{i \in S} a_i$
- ➔ každá podkoalice musí získat alespoň tolik, kolik by si uměla zajistit při vystoupení z koalice: $v(L) \leq \sum_{i \in L} a_i, L \in S$

Pokud některá koalice není skupinově stabilní, vracíme s k principu kolektivní racionality a sestavíme novou koaliční strukturu (vybereme koalici s druhou nejvyšší výhrou) a celý postup opakujeme.

Množina všech přípustných rozdělení a_1, a_2… a_N, která splňují podmínky skupinové stability, se nazývá jádro hry. Může existovat i více jader, pokud charakteristická funkce nabývá shodných hodnot pro více koalic a jádra pro tyto koalice splňují podmínky skupinové stability. Jádro ale může být i prázdné, nejsou-li podmínky splněny pro žádné rozdělení.

Hry ve tvaru charakteristické funkce lze řešit kromě principu skupinové stability i jinými způsoby, ale žádný nezaručuje jednoznačné řešení pro daný typ konfliktu. Vznikla řada metod pro analýzu vyjednávání a pro ocenění síly hráčů, jako například Shapleyův vektor.

Shapleyův vektor (*Lloyd Stowell Shapley*) h_1, h_2.. h_N tvoří Shapleyovy hodnoty, což jsou střední hodnoty mezního přínosu *i*-tého hráče. Lze pomocí něj tedy odhadnout sílu jednotlivých hráčů z hlediska mezního přínosu do všech koalic, v nichž můžou být členem.

Jak na to:

- ➔ přínos *i*-tého hráče do koalice S je roven *v*(S) – *v*(S – {i}), tedy rozdíl mezi výhrou koalice s daným hráčem a bez něj;
- ➔ Shapleyova hodnota pro i-tého hráče h_i se spočítá jako $\sum_{S \ni i} \frac{(|S|-1)!(N-|S|)!}{N!}[v(S) - v(S - \{i\})]$, kde |S| značí velikost koalice, v níž je hráč členem, *N* značí celkový počet členů, a sčítáme přes všechny koalice, v nichž by mohl být *i* členem. Například mějme 3 hráče, kteří mohou vytvořit koalice s těmito výhrami:

v({1}) = 1
v({2}) = 2
v({3}) = 3
v({1,2}) = 2
v({1,3}) = 3
v({2,3}) = 6
v({1,2,3}) = 6

Pak například první hráč může být členem 4 různých koalic:

koalice {1}, koalice {1,2}, koalice {1,3} a koalice {1,2,3}.

$h_1 = \frac{(1-1)!(3-1)!}{3!}[1-0] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[2-1] + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!}[3-1] + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!}[6-6] = 2/6$

Stejně se dá spočítat, že h_2 = 14/6, h_3 = 20/6.

VOLEBNÍ HRY

Příkladem kooperativní hry vice hráčů jsou **volební hry** (hlasovací hry). Uvažujme *N* stran v parlamentu. Celkový počet poslanců v parlamentu značíme a_0, počet poslanců *i*-té politické strany pak a_i. Hlasovací pravidlo α označuje nejvyšší podíl hlasů, který ještě nestačí k vítězství, tzn. k vítězství je potřeba minimálně $\lfloor \alpha \cdot a_0 \rfloor + 1$ hlasů (například pro α = 0,5 a 101 poslanců je to 0,5·101 + 1 = 51 poslanců. Aby tedy byla *m*-členná koalice vítězná, musí platit vztah $\sum_{i=1}^{m} a_i > \lfloor \alpha \cdot a_0 \rfloor$

V případě vicekomorové legislativy (parlament s vice sněmovnami) musí projít návrh všemi *p* sněmovnami, aby byl přijat. Celkový počet poslanců v *k*-té sněmovně značíme a_{0k}, počet poslanců *i*-té politické strany v k-té sněmovně pak a_{ik}. Aby byla m-členná koalice vítězná v k-té sněmovně, musí platit vztah $\sum_{i=1}^{m} a_{ik} > \lfloor \alpha \cdot a_{0k} \rfloor$ pro všechna *k* = 1,2…*p*. To musí platit I pro sněmovnu, kde je rozdíl nejtěsnější, tzn.musí být splněn vztah $\min\left[\sum_{i=1}^{m} a_{ik} - \lfloor \alpha \cdot a_{0k} \rfloor\right] > 0$, aby byla *m*-členná koalice vítězná.

Charakteristická funkce *v*(S) u volební hry nabývá hodnoty 1 v případě, že koalice S je vítězná, nebo 0 v případě, že je koalice S poražená. Dvojice (*N*, *v*) se pak nazývá prostá hra, trojice (*N*, *v*, α) se nazývá hlasovací hra. U volebních her platí, že charakteristická funkce je superaditivní, protože větší koalice znamená větší počet hlasů, a tím i vyšší pravděpodobnost prosazení zákona. Naším cílem je většinou měření síly jednotlivých koalic. Budeme předpokládat, že všichni zástupci jedné strany hlasují vždy jednotně, že všichni členové vytvořené koalice hlasují jednotně a že je možné vytvořit libovolnou koalici a všechny koalice jsou stejně pravděpodobné. V případě prosté hry, kdy nabývá charakteristická funkce jen hodnot 0 nebo 1, mohou nastat jen čtyři různé případy:

v(S)	v(S – {i})	v(S) – v(S – {i})	
1	1	0	koalice je vítězná s *i*-tým hráčem i bez něj, hráč není nepostradatelný
1	0	1	i-tý hráč je v koalici nepostradatelný
0	1	nelze	nemůže nastat (superaditivita)
0	0	0	koalice není vítězná ani s *i*-tým hráčem

Výraz *v*(S) – *v*(S – {i}) tedy značí přínos *i*-tého hráče do koalice.

ODHAD SÍLY POLITICKÝCH STRAN

Existuje několik možností, jak odhadnout sílu jednotlivých politických stran v parlamentu, mezi něž patří Shapley-Shubikův index síly a Banzhafův index síly.

SHAPLEY-SHUBIKŮV INDEX SÍLY je modifikací Shapleyovy hodnoty, která se spočítala jako $\sum_{S \ni i} \frac{(|S|-1)!(N-|S|)!}{N!}[v(S) - v(S - \{i\})]$. Výraz v hranaté závorce bude v případě prosté hry roven vždy 0 nebo 1. Tím pádem sčítáme pouze přes všechny koalice, v nichž je *i*-tý hráč nepostradatelný (tedy v nichž [*v*(S) – *v*(S – {i}] = 1).

Shapley-Shubikův index síly spočítáme jako: $\sigma_i = \sum_{S \ni i} \frac{(|S|-1)!(N-|S|)!}{N!}$

Platí, že součet SS indexů všech stran se rovná 1 a že $\sigma_i \geq 0$. Vektor $\boldsymbol{\sigma}=\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_N$ lze interpretovat jako vektor pravděpodobností. Hodnotu σ_i interpretujeme jako pravděpodobnost, že *i*-tá strana bude nezbytná při sestavování všech teoreticky možných koalic. V praxi se však často hráč s nejvyšší hodnotou SS indexu ostatním hráčům znelíbí a skončí v izolaci.

BANZHAFŮV INDEX SÍLY (*John Francis Banzhaf III*) je odhadem síly hráče z hlediska počtu koalic, v nichž je nepostradatelný. Banzhafův index síly počítáme jako $\beta_i = \frac{e_i}{\sum_{k=1}^{N} e_k}$, kde e_i označuje počet koalic, v nichž je *i*-tá strana nepostradatelná, a ve jmenovateli je počet koalic, v nichž je některá strana nepostradatelná.

Platí, že součet β_i indexů všech stran se rovná 1 a že $\beta_i \geq 0$. Vektor $\beta = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N$ lze interpretovat jako vektor pravděpodobností. Hodnotu β_i interpretujeme jako pravděpodobnost situace, že *i*-tá strana svým odstoupením z koalice anuluje vítězné postavení příslušné koalice.

Příklad: mějme 3 strany s následujícím počtem hlasů: strana A 6 hlasů, strana B 3 hlasy, strana C 3 hlasy. Hlasovací pravidlo $\alpha = 0{,}5$, takže k tomu, aby byla kalice vítězná, je potřeba alespoň $\lfloor 0{,}5 \cdot 12 \rfloor + 1 = 7$ hlasů. Možné koalice a jejich počet hlasů je v následující tabulce:

koalice	**počet hlasů**	**hodnoty charakteristické funkce**
A	6	0
B	3	0
C	3	0
AB	9	1
AC	9	1
BC	6	0
ABC	12	1

Ve kterých koalicích je nepostradatelná strana A? Musí jít o koalici, která je vítězná a obsahuje stranu A (což jsou koalice AB, AC, ABC), ale zároveň bez strany A bude poražená (což jsou opět koalice AB, AC i ABC, protože ani jedna nebude mít bez strany A alespoň nezbytných 7 hlasů).

Strana A je tedy nepostradatelná v koalicích: AB, AC, ABC.
Strana B je nepostradatelná jen v koalici AB. Koalice ABC by i po jejím odstoupení byla vítězná.
Strana C je nepostradatelná jen v koalici AC. Koalice ABC by i po jejím odstoupení byla vítězná.

$$\sigma_A = \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} + \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} + \frac{(3-1)!(3-3)!}{3!} = \frac{4}{6}$$

$$\sigma_B = \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} = \frac{1}{6}$$

$$\sigma_C = \frac{(2-1)!(3-2)!}{3!} = \frac{1}{6}$$

Celkový počet koalic, v nichž je některá strana nepostradatelná, je 5 (A ve třech, B i C v jedné).
Banzhaův index je tedy roven: $\beta_1 = \frac{3}{5}$, $\beta_2 = \frac{1}{5}$, $\beta_3 = \frac{1}{5}$.

TEORIE FORMOVÁNÍ KOALIC

Existuje řada teorií, jak se formují koalice, a to nepolitické a politické.

NEPOLITICKÉ TEORIE vycházejí ze hry ve tvaru antagonostického konfliktu (s konstantním součtem), tedy to, co jeden získá, druhý ztratí. Není tedy pravděpodobné, že koalice bude obsahovat postradatelné účastníky. Mezi ně patří například:

- *teorie minimální většinové koalice* (Von Neumann, Morgenstern), podle níž se vytvoří taková koalice, která se stane menšinovou, pokud ji opustí libovolný člen (může jich ale existovat velké množství).
- Počet možných koalic redukuje *teorie nejmenší většinové koalice* (Riker) podle níž se z množiny minimálních většinových koalic vyberou ty, které mají nejmenší celkovou váhu.
- Podle *koncepce vyjednávacího návrhu* (Leiserson) se z množiny minimálních většinových koalic vyberou ty, které mají nejmenší počet členů, protože čím méně je členů, tím snazší bude dohoda

Mezi POLITICKÉ TEORIE patří například:

- teorie *minimální souvislé většinové koalice* (Axelrod). Vzniklé koalice jsou podle ní ideologicky souvislé (při uspořádání stran od levicových po pravicové spolu strany v koalici sousedí) a jsou minimální (opustí-li ji libovolný člen, stane se nesouvislou nebo nebude většinová).
- Podle teorie *uzavřené koalice s minimálním rozpětím* (De Swan) vzniknou takové minimální souvislé koalice, které mají nejmenší ideologické rozpětí.

ZDROJE

Mgr. Jana Sekničková, Ph. D.: prezentace k předmětu 4EK421 Teorie her a ekonomického rozhodování, 2013.

Kooperativní hra, Wikipedia org., 2013.
http://cs.wikipedia.org/wiki/Kooperativn%C3%AD_hra#Koalice.2C_koali.C4.8Dn.C3.AD_struktura

Hykšová, M.: Kooperativní hry více hráčů. České vysoké učení technické, 2009.
http://euler.fd.cvut.cz/predmety/teorie_her/prednaska_koopN.pdf