SPECIFIKACE A IDENTIFIKACE SIMULTÁNNÍCH EKONOMETRICKÝCH MODELŮ

INTERDEPENDENTNÍ A REKURZIVNÍ SYSTÉMY.

V ekonomické praxi se často stává, že endogenní proměnné nejsou určeny pouze jednou rovnicí, ale jde o soustavu vzájemně závislých vztahů. Pokud jsou endogenní proměnné určeny nikoli pouze predeterminovanými proměnnými, nýbrž i dalšími endogenními proměnnými, nacházejí se v modelu **vysvětlující proměnné stochastického charakteru**. Pro zopakování: endogenní proměnné jsou ty, které se snažíme vysvětlit modelem. Exogenní jsou ty proměnné, které jsou určeny mimo model. Predeterminované proměnné jsou exogenní a zpožděné endogenní proměnné.

MSR je tedy model, ve kterém je **několik endogenních proměnných současně determinováno určitou soustavou vztahů**. Jestliže jsou v modelu zpětné vazby, nemůžeme odhadovat parametry jednotlivých rovnic jen tak odděleně, aniž bychom vzali v úvahu informaci z ostatních rovnic modelu.

V případě MSR se zpětnými vazbami je porušen GM předpoklad, který říká, že vysvětlující proměnné musí být nezávislé na náhodné složce modelu. MNČ tedy většinou neposkytuje nestranné ani konzistentní odhady. Při použití MNČ vzniká tzv. chyba simultánních rovnic.

STRUKTURNÍ, REDUKOVANÝ A KONEČNÝ TVAR MSR

Uvažujme model, v němž je *G* endogenních proměnných a *K* predeterminovaných proměnných.

STRUKTURNÍ TVAR

Strukturní tvar MSR lze maticově zapsat jako

$$\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}_t = \mathbf{u}_t$$

kde y_t je *G* x 1 vektor endogenních proměnných, $\mathbf{x}_t$ je *K* x 1 vektor predeterminovaných proměnných, **B** je regulární matice *G* x *G* strukturních parametrů endogenních proměnných a **Γ** je *G* x *K* matice strukturních parametrů predeterminovaných proměnných, $\mathbf{u}_t$ je vektor náhodných složek, přičemž platí $\mathbf{u}_t \sim N(0, \Sigma)$ a $E(\mathbf{u}_t'\mathbf{u}_s) = 0$, $t, s = 1,2....T$, $t \neq s$. Koeficienty rovnice označujeme jako **strukturní parametry**.

REDUKOVANÝ TVAR

Redukovaný tvar MSR je tvar, ve kterém jsou endogenní proměnné vyjádřeny pouze jako funkce všech predeterminovaných proměnných a náhodných složek. V modelu tak už nejsou interakce mezi endogenními proměnnými, nýbrž pouze jednosměrné příčinné vazby.

Omezený redukovaný tvar získáme řešením podle B:

$$\mathbf{y}_t = -\mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}\mathbf{x}_t + \mathbf{B}^{-1}\mathbf{u}_t$$

Neomezený redukovaný tvar získáme z omezeného substitucí:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\Pi}\mathbf{x}_t + \mathbf{v}_t$$

kde $v_t \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{\Omega})$, přičemž $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{B}^{-1})'$ a $E(\mathbf{v}_t'\mathbf{v}_s) = \mathbf{0}$ pro $t, s = 1,2....T$, $t \neq s$. Prvky matice **Π** jsou přímé nebo dynamické multiplikátory: měří průměrnou reakci vysvětlovaných endogenních proměnných na jednotkovou změnu predeterminované proměnné. Redukovaný tvar obsahuje jako vysvětlující proměnné pouze predeterminované proměnné nezávislé na náhodných složkách rovnic. Konzistentní odhady matice **Π** lze tedy získat i MNČ. Parametry redukovaného tvaru vyjadřují **celkovou** změnu endogenní proměnné při změně predeterminované proměnné (tzn. změnu **přímo** v důsledku změny této predeterminované proměnné a **nepřímo** v důsledku jejího působení na zbylé endogenní proměnné, které danou endogenní proměnnou také ovlivňují). Parametry strukturního tvaru proti tomu měří pouze přímý efekt.

Keynesiánský model: *C* je spotřeba, *Y* je důchod, *I* jsou investice.

Strukturní tvar	$C_t = \beta_0 + \beta_1 Y_t + u_t$, $Y_t = C_t + I_t$	$C_t = 2 + 0{,}8\,Y_t + u_t$, $Y_t = C_t + I_t$
Omezený redukovaný tvar	$Y_t = \beta_0/(1-\beta_1) + 1/(1-\beta_1)I_t + u_t\,/\,(1-\beta_1)$ $C_t = \beta_0/(1-\beta_1) + \beta_1/(1-\beta_1)I_t + u_t\,/\,(1-\beta_1)$	$Y_t = 2/(1-0{,}8) + 1/(1-0{,}8)I_t + u_t\,/\,(1-0{,}8)$ $C_t = 2/(1-0{,}8) + 0{,}8/(1-0{,}8)I_t + u_t\,/\,(1-0{,}8)$
Neomezený redukovaný tvar	$Y_t = \pi_{11} + \pi_{12}I_t + v_t$, $C_t = \pi_{21} + \pi_{22}I_t + v_t$,	$Y_t = 10 + 4I_t + v_t$ $C_t = 10 + 5\,I_t, + v_t$

Koeficienty redukovaného tvaru jsou přímé nebo běžné multiplikátory. Kdyby byly mezi vysvětlujícími proměnnými nějaké zpožděné hodnoty, nazýval by se příslušný koeficient dynamický multiplikátor. Například multiplikátor π_{12} říká, jak se změní *Y* při změně I o jednotku: změní se jednak díky změně *I*, jednak díky tomu, že změna *I* vyvolá změnu *C*, a v důsledku toho se změní *Y*.

KONEČNÝ TVAR

Konečný tvar MSR se týká takových MSR, které obsahují zpožděné hodnoty endogenních proměnných. Vyjadřuje endogenní proměnné v běžném období jako funkci pouze běžných a zpožděných hodnot vektorů exogenních proměnných a náhodných složek. Konečný tvar se odvodí takto:

1) Přepíšeme strukturní tvar tak, že rozdělíme predeterminované proměnné na exogenní (z) a zpožděné endogenní (y_{t-1}) : $\mathbf{B}\mathbf{y}_t + \mathbf{\Gamma}_1\mathbf{x}_t + \mathbf{\Gamma}_2\mathbf{y}_{t-1} = \mathbf{u}_t$, kde $\mathbf{\Gamma}_1$ je *G* x *K* matice parametrů exogenních proměnných, a $\mathbf{\Gamma}_2$ = *G* x *G* matice parametrů endogenních proměnných zpožděných o jedno období.
2) Řešením podle **B** a substitucí získáme redukovaný tvar: $\mathbf{y}_t = \Pi_1\mathbf{z}_t + \Pi_2\mathbf{y}_{t-1} + \mathbf{v}_t$.
3) Vyjádříme redukovaný tvar pro předcházející období: $\mathbf{y}_{t-1} = \Pi_1\mathbf{z}_{t-1} + \Pi_2\mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{v}_{t-1}$.
4) Dosadíme $\Pi_1\mathbf{z}_{t-1} + \Pi_2\mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{v}_{t-1}$ za $\mathbf{y}_{t-1}$ do rovnice z bodu 2: $\mathbf{y}_t = \mathbf{\Pi}_1\mathbf{z}_t + \mathbf{\Pi}_2\mathbf{\Pi}_1\mathbf{z}_{t-1} + \mathbf{\Pi}_2^2\,\mathbf{y}_{t-2} + \mathbf{v}_t + \mathbf{\Pi}_2\mathbf{v}_{t-1}$
5) Totéž opakujeme (postupně dosazujeme) a dostaneme:
$\mathbf{y}_t = \Pi_1\mathbf{z}_t + \Pi_2\Pi_1\mathbf{z}_{t-1} + \ldots + \Pi_2^{\,t-1}\Pi_1\mathbf{z}_1 + \mathbf{v}_t + \Pi_2\mathbf{v}_{t-1} + \ldots + \Pi_2^{\,t-1}\mathbf{v}_1 + \Pi_2^{\,t}\mathbf{y}_0$
6) Jestliže se hodnoty y_t mají asymptoticky blížit ke své rovnovážné úrovni, tak $\mathbf{\Pi}_2^{\mathbf{t}}$ musí konvergovat k nule, takže pro $t \rightarrow \infty$ lze model přepsat jako

$$\mathbf{y}_t = \Pi_1\mathbf{z}_t + \Pi_2\Pi_1\mathbf{z}_{t-1} + \ldots \mathbf{w}_t = \mathbf{M}_0\mathbf{z}_t + \mathbf{M}_1\mathbf{z}_{t-1} + \ldots \mathbf{w}_t$$

$\mathbf{M}_0$ je běžný multiplikátor. $\mathbf{M}_r$ ($\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$**…**) jsou dynamické multiplikátory zpožděné o *r* období, kde $\mathbf{M}_r = \mathbf{\Pi}_2^r\mathbf{\Pi}_1$. Konečný součet běžných multiplikátorů se nazývá kumulativní multiplikátor: $\mathbf{C}_S = \sum_{r=0}^{s}\mathbf{M}_r = \sum_{r=0}^{s}\mathbf{\Pi}_2^r\mathbf{\Pi}_1$ a vyjadřuje kumulovaný účinek trvalé jednotkové změny exogenní proměnné za *r* období na endogenní proměnnou v běžném období. Nekonečný součet běžných multiplikátorů se nazývá dlouhodobý (celkový) multiplikátor: $C_S = \sum_{r=0}^{\infty} M_r = \sum_{r=0}^{\infty}\Pi_2^r\Pi_1$. Pokud platí, že $\lim_{t\to\infty}\mathbf{\Pi}_2^t$ se blíží nule, pak $\mathbf{C}_S = \frac{\mathbf{\Pi}_1}{I-\mathbf{\Pi}_2}$. V tom případě se po exogenní změně (šoku) hodnoty endogenních proměnných po čase vrátí ke své rovnovážné hodnotě (systém je stabilní). Konečný tvar se hodí ke zkoumání podmínek stabilizace.

INTERDEPENDENTNÍ A REKURZIVNÍ MSR

Interdependentní jsou takové MSR, které **obsahují zpětné vazby**, jako například keynesiánský model:

$C_t = \beta_1 + \beta_2 Y_t + u_t$,

$Y_t = C_t + I_t$,

kde *C* je spotřeba, *Y* je důchod, *I* jsou investice. První rovnice je stochastická, je to tzv. behaviorální rovnice (popisuje chování ekonomických subjektů). Druhá rovnice je tzv. identita nebo definiční rovnice. V tomto modelu je exogenní proměnná I, která není závislá na náhodné složce, a dvě endogenní proměnné C, Y, které jsou určeny systémem.

Rekurzivní jsou takové MSR, které **neobsahují zpětné vazby** mezi endogenními proměnnými ani vzájemně závislé náhodné složky. Říká se jim i modely řetězových příčin. Endogenní proměnné strukturního tvaru můžeme uspořádat tak, že matice strukturních parametrů **B** všech endogenních proměnných je **trojúhelníková**. To znamená, že model můžeme zapsat například takto:

$Y_1 = \textit{exogenní proměnné} + u_1$

$Y_2 = \textit{exogenní proměnné} + \beta_{21} Y_1 + u_2$

$Y_3 = \textit{exogenní proměnné} + \beta_{31} Y_1 + \beta_{32} Y_2 + u_3$

…

V systému není žádná rovnice, která by obsahovala proměnné vysvětlované následující rovnicí systému. Náhodné složky jednotlivých rovnic jsouvnezávislé. Kovarianční matice náhodných složek je diagonální, mimo diagonálu jsou nuly (kovariance jsou nulové). Matice **B** má tvar:

$$\mathbf{B}= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{31} & \beta_{32} & 1 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \beta_{G1} & \beta_{G2} & \beta_{G3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad \Sigma= \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \sigma_G^2 \end{bmatrix}$$

Rekurzivní modely jsou vždy přesně identifikované (díky těmto apriorním omezením matic B a Σ). Můžeme použít MNČ a dostaneme konzistentní, asymptoticky vydatné odhady. Zobecněním jsou tzv. blokově rekurzivní MSR, v nichž tyto jednosměrné vazby mez endogenními proměnnými existují pro podmnožiny (bloky) proměnných.

IDENTIFIKACE MSR

Viz otázka Kritéria identifikace MSR

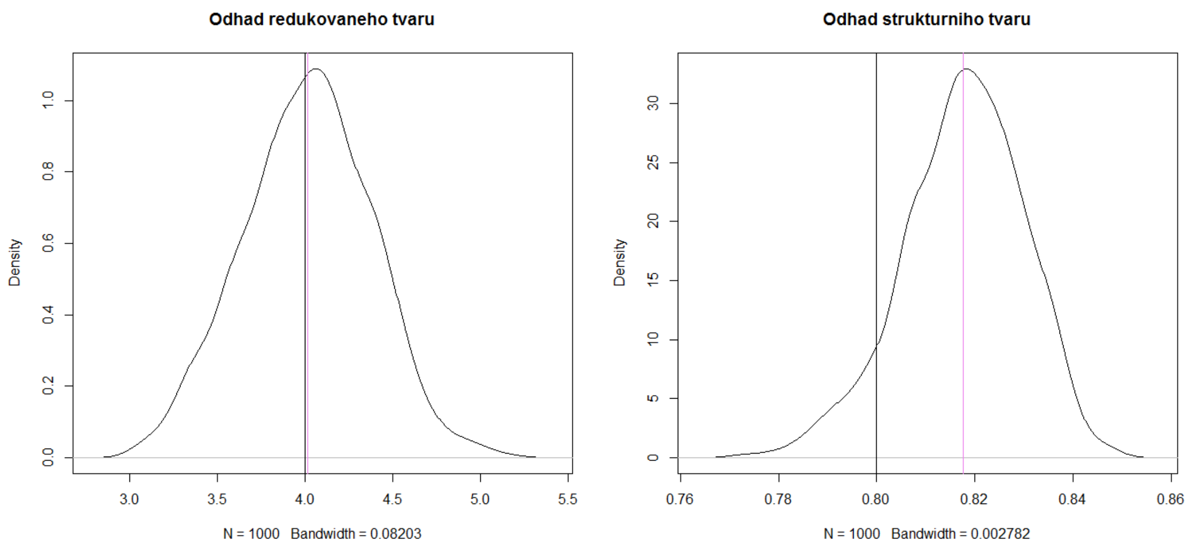
SKRIPT

```
#(priklad - Zouhar 2010 str. 229)

I = seq(2,4,length.out = 20)
bRED = NULL
bSTR = NULL
for (i in 1:1000)
{
u = rnorm(20,0,0.2)
Y = 10 + 5*I + 5*u
C = 10 + 4*I + 5*u
bRED = c(bRED,lm(C~I)$coef[2])
bSTR = c(bSTR,lm(C~Y)$coef[2])
}

par(mfrow = c(1,2))
plot(density(bRED), main = "Odhad redukovaneho tvaru")
abline(v = 4)
abline(v = mean(bRED),col = "violet")

plot(density(bSTR), main = "Odhad strukturniho tvaru")
abline(v = 0.8)
abline(v = mean(bSTR),col = "violet")
```



ZDROJE

Hušek, R: Ekonometrická analýza. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2007.
Krkošková, Š., Ráčková, A., Zouhar, J.: Základy ekonoometrie v příkladech. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2010.