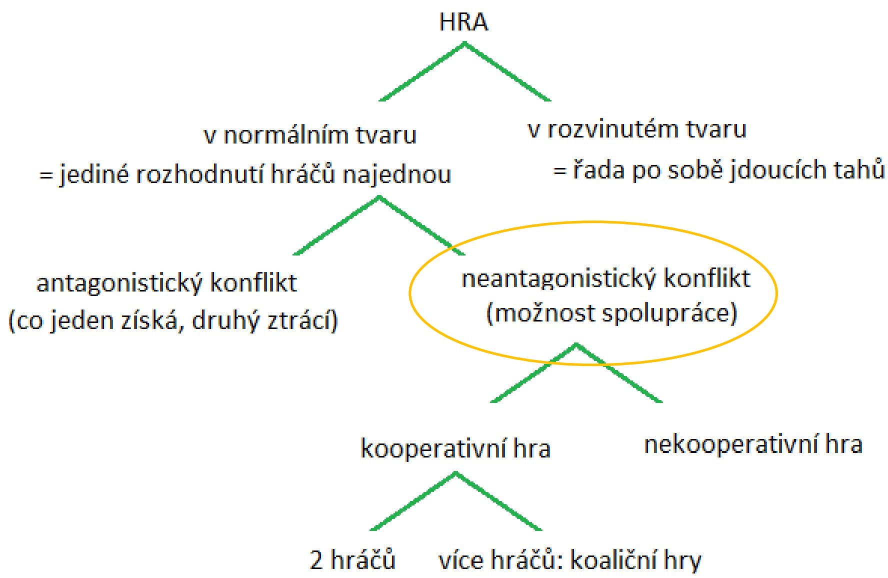
BIMATICOVÉ HRY

FORMULACE, KONCEPCE ŘEŠENÍ, ZÁKLADNÍ VĚTA BIMATICOVÝCH HER, VĚZŇOVO DILEMA

CO JE TO TEORIE HER A ČÍM SE ZABÝVÁ?

Teorie her je ekonomická vědní disciplína, která se zabývá studiem konfliktních situací. Konflikty bychom mohli zjednodušeně rozdělit takto:



JAK SI PORADIT S NEANTAGONISTICKÝM KONFLIKTEM?

Neantagonistický konflikt je takový konflikt, kdy zájmy hráčů nejsou v přímém protikladu (říkáme tomu hra s nekonstantním součtem). Výhra prvního hráče není prohrou druhého, někdy se jim tedy může vyplatit spolupracovat. Tyto hry rozdělujeme na kooperativní, kdy hráči mohou spolupracovat, je-li to pro ně výhodné, a nekooperativní, kdy spolupracovat nemohou.

Hra v normálním tvaru je dána:

- **množinou hráčů** $\{1, 2, \ldots, N\}$,
- **množinou prostorů strategií** $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$, kde X_i označuje prostor strategií i-tého hráče,
- **množinou výplatních funkcí** $\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$.

Předpokládáme, že tito hráči jsou inteligentní: snaží se maximalizovat svůj užitek (hodnotu výplatní funkce) a mají dokonalé informace o hře, tedy znají množinu hráčů, svůj prostor strategií a výplatní funkci a prostor strategií a výplatní funkci ostatních hráčů.

NEKOOPERATIVNÍ HRA DVOU HRÁČŮ

Hru můžeme opět uspořádat do matice. Tentokrát ale neplatí, že co jeden hráč získá, druhý ztratí. Mezi maticemi není definovaný přímý vztah, takže potřebujeme dvě matice: A pro prvního hráče a B pro druhého hráče.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

První hráč (X) volí řádek, má tedy *m* možných strategií x_1 až x_m a získá a_{ij} (hodnota výplatní funkce prvního hráče). Druhý hráč (Y) volí sloupec, má tedy *n* možných strategií y_1 až y_n a získá b_{ij} (hodnota výplatní funkce druhého hráče). Prostor strategií je konečný, celkem existuje m · n různých kombinací. Každé kombinaci lze přiřadit výhru prvního hráče $f_1(x, y)$ a výhru druhého hráče $f_2(x, y)$.

Návod, jak najít optimální strategii hráčů v bimaticové hře, dává Nashova rovnováha. Ta říká, že pokud se některý z hráčů odchýlí od své optimální strategie (zatímco soupeř se své optimální strategie držet bude), nepolepší si. **Nashovo rovnovážné řešení** získáme nalezením **sedlového prvku** (sedlového bodu), což je číslo **největší ve svém sloupci v matici A** a **největší ve svém řádku v matici B**. Hra může mít jeden sedlový prvek, více sedlových prvků nebo žádný sedlový prvek. Pokud nemá žádný sedlový prvek, neexistuje řešení v ryzích strategiích. Optimální strategii v tom případě hledáme pomocí smíšeného rozšíření. Základní věta dvojmaticových her totiž říká:

Každá dvojmaticová hra má alespoň jedno rovnovážné řešení (ve smíšených strategiích).

Pomocí smíšeného rozšíření zjistíme, s jakou pravděpodobností budou hráči hrát jednotlivé strategie.

VĚZŇOVO DILEMA

Modelovým nekooperativním konfliktem je vězňovo dilema. Dva vězni jsou odděleně uvězněni, nemohou se tedy domlouvat, co udělají. Každý má možnost se přiznat nebo nepřiznat. Pokud se první přizná a druhý ne, dostane první nižší trest (nebo bude volný) a druhý dostane vyšší trest. Nepřiznají-li se oba, dostanou oba nižší trest. Přiznají-li se oba, dostanou oba vyšší trest. První vězeň uvažuje následovně: jestliže se druhý vězeň přizná, bylo by pro něj výhodnější se přiznat, protože by dostal nižší trest. Jestliže se nepřizná, bylo by pro něj také výhodnější se přiznat. Stejně přemýšlí i druhý vězeň. Postupem uvedeným výše najdeme sedlový bod:

$$\begin{array}{rc} & \begin{matrix} \text{přiznat} & \text{nepřiznat} \end{matrix} \\ \begin{matrix} \text{přiznat} \\ \text{nepřiznat} \end{matrix} & \begin{pmatrix} \boxed{-6, -6} & 0, -10 \\ -10, 0 & -2, -2 \end{pmatrix} \end{array}$$

Zdá se, že optimální je, když se oba přiznají. Přitom pokud by se ani jeden nepřiznal, dopadli by oba lépe. Je to tedy rovnovážné řešení, ale není Paretovsky rovnovážné (na rozdíl od zbylých tří), protože pro něj platí, že si někdo může polepšit, aniž by si někdo jiný pohoršil. V ekonomii se podobná situace objevuje například u kartelových dohod. Konflikt ukazuje, že když se všechny osoby chovají tak, aby maximalizovaly svůj užitek, mohou si nakonec všichni pohoršit.

KOOPERATIVNÍ HRA DVOU HRÁČŮ

Uvažujme nejprve jen dva hráče. Označme výhru prvního hráče, resp. druhého hráče při nespolupráci *v*(1), resp. *v*(2), a jejich celkovou výhru při spolupráci pak *v*(1,2). Výhodnost spolupráce mohou hráči posoudit porovnáním výhry při spolupráci se zaručenou výhrou, tedy s výhrou, kterou by získali, kdyby nespolupracovali. Můžou vzít v úvahu rovnovážnou nebo maximinovou zaručenou výhru.

Rovnovážnou zaručenou výhru berou hráči v úvahu tehdy, když očekávají, že oba případnou domluvu dodrží. V tom případě hráči porovnávají výhru při spolupráci s výhrou při volbě sedlového prvku, který by zvolili při nespolupráci.

Maximinovou zaručenou výhru berou hráči v úvahu tehdy, když se obávají, že někdo dohodu poruší. V tom případě porovnává každý hráč výhru při spolupráci s výhrou za situace, kdy mu druhý hráč bude dělat to nejhorší, co může. Zaručená výhra 1. hráče $v(1) = \max_i \min_j a_{ij}$. Zaručená výhra 2. hráče $v(2) = \max_j \min_i b_{ij}$.

Pokud hráči zvolí spolupráci, musí se pak dohodnout, jak si výhru rozdělit. Celková výhra musí být rozdělena mezi hráče: $\boldsymbol{a_1 + a_2 = v(1,2)}$**,** 1. hráč musí dostat hodnotu a_1, která bude alespoň rovna zaručené výhře: $\boldsymbol{a_1} \geq \boldsymbol{v(1)}$ a 2. hráč musí dostat hodnotu a_2, která bude alespoň rovna zaručené výhře: $\boldsymbol{a_2} \geq \boldsymbol{v(2)}$. Všechny dvojice a_1, a_2, které toto splňují, tvoří tzv. **jádro hry**.

ZDROJE

Mgr. Jana Sekničková, Ph. D.: prezentace k předmětu 4EK421 Teorie her a ekonomického rozhodování, 2013.