NÁHODNÉ VELIČINY

GENEROVÁNÍ SPOJITÝCH A DISKRÉTNÍCH NÁHODNÝCH VELIČIN, VYUŽITÍ NÁHODNÝCH VELIČIN V SIMULACI, METODY TRANSFORMACE NÁHODNÝCH ČÍSEL NA HODNOTY NÁHODNÝCH VELIČIN.

JAK SE NÁHODNÁ ČÍSLA PŘEVEDOU NA HODNOTY NÁHODNÝCH VELIČIN?

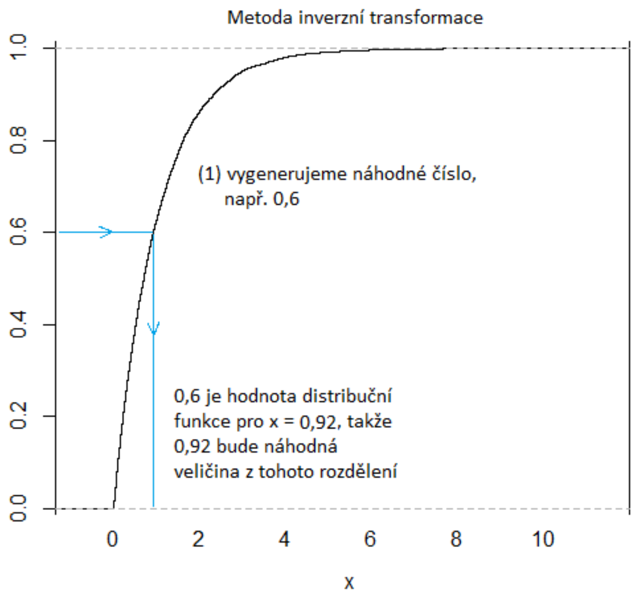
Náhodná čísla je možné převést na hodnoty náhodných veličin různými způsoby.

Metoda inverzní transformace předpokládá, že existuje distribuční funkce F(x) pro náhodnou veličinu X a také funkce k ní inverzní. Mezi hodnotou náhodné veličiny X z intervalu (a, b) a hodnotou náhodného čísla z intervalu (0, 1) pak existuje vzájemně jednoznačné přiřazení. Takže vygenerujeme náhodné číslo z intervalu (0,1) a zjistíme, jaká hodnota z daného rozdělení má hodnotu distribuční funkce takovou, která odpovídá vygenerovanému náhodnému číslu. To bude hodnota náhodné veličiny z daného rozdělení.

Příklad:

Rovnoměrné rozdělení má distribuční funkci F(x) = (x–a)/(b–a). Kdybychom chtěli vygenerovat náhodnou veličinu z rovnoměrného rozdělení z intervalu (5, 12), tak například pro r = F(x) = 0,6 spočítáme x jako x = r(b – a) + a = 9,2.

Exponenciální rozdělení má distribuční funkci F(x) = 1 – $e^{-\lambda x}$. Kdybychom chtěli vygenerovat náhodnou veličinu z exponenciální rozdělení s parametrem λ = 1, tak např. pro r = F(x) = 0,6 spočítáme x jako x =$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-r)$= 0,92. Na obrázku bychom to mohli znázornit následovně:

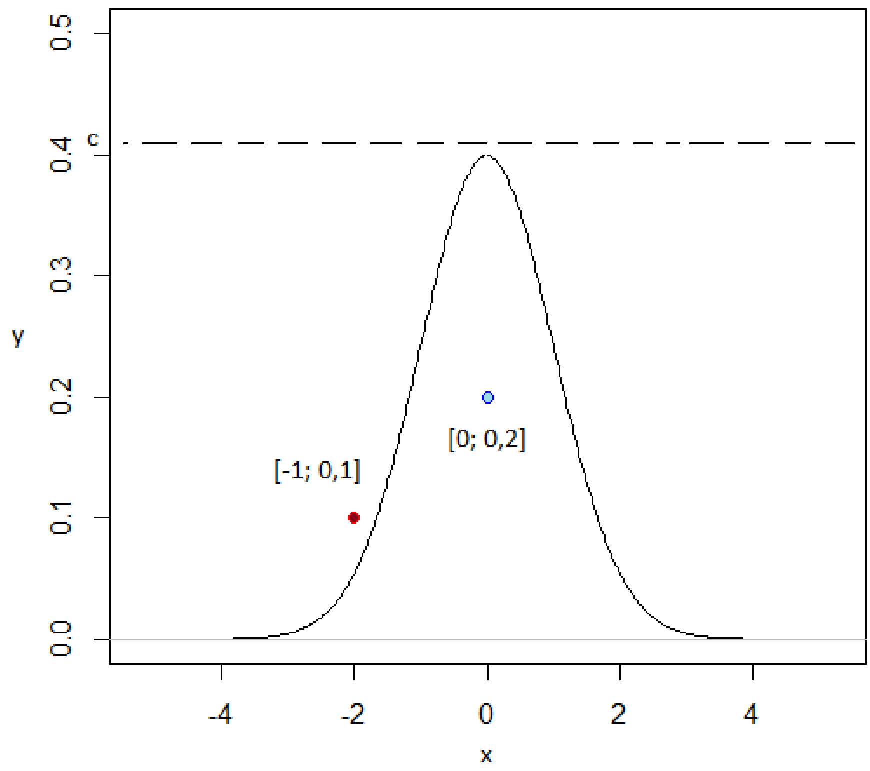


METODA INVERZNÍ TRANSFORMACE: EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ

U normálního rozdělení je s inverzní distribuční funkcí trochu problém, nicméně v Excelu existuje funkce NORMINV, která hodnoty z normálního rozdělení generuje. Musíme ji zadat ve tvaru NORMINV(NÁH.ČÍSLO(), *střední hodnota, sm.odchylka*). Tato funkce ale postupuje iterativně. V jednotlivých iteracích hledá číslo, jehož hodnota distribuční funkce se bude blížit vygenerovanému náhodnému číslu.

Zamítací metoda generuje bod o dvou souřadnicích [*x*, *y*]. Bod x pochází z intervalu (a, b), kterým ohraničíme hustotu pravděpodobnosti (například pro normované normální rozdělení by to mohl být interval (–4, 4). Existuje číslo *c* takové, že f(x) ≤ *c*. Bod *y* pak pochází z intervalu (0, c). Jestliže je *y* větší než f(x), pak generujeme znovu, jinak je generovaná hodnota náhodnou veličinou z požadovaného rozdělení.

Například chceme vygenerovat hodnoty z normovaného normálního rozdělení. Vygenerujeme body [0; 0,2] a [-1; 0,1]. Protože 0,2 < *f*(0), první bod tam patří, ale protože 0,1 > f(−1), druhý bod nikoli.



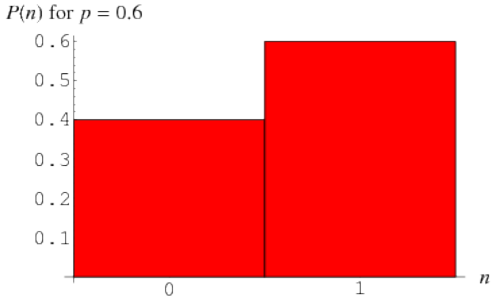
ZAMÍTACÍ METODA: NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

Kompoziční metoda skládá složitější rozdělení z jednodušších. Pokud je $f_i(x)$ hustota pravděpodobnosti dobře generovatelného rozdělení a p_i náhodně vygenerované číslo pro i-tý výběr, pak hustota pravděpodobnosti složitého rozdělení f(x) $=\sum_{i=1}^{k} p_i f_i(x)\,, \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$.

Kromě těchto tří obecnějších způsobů lze u řady rozdělení generovat náhodné veličiny dalšími způsoby, které budou uvedeny přímo u popisu daných rozdělení.

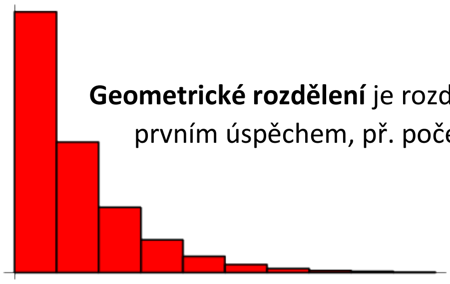
JAKÁ EXISTUJÍ DISKRÉTNÍ ROZDĚLENÍ A JAK Z NICH GENEROVAT NÁHODNÉ VELIČINY?

Alternativní (Bernouilliho) rozdělení je rozdělení, kdy má náhodný pokus jen 2 možné výsledky, př. hod mincí.
S pravděpodobností *p* nastane úspěch (X = 1),
s pravděpodobností 1 – p = q neúspěch (X = 0).



PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE: ALTERNATIVNÍ ROZDĚLENÍ

ZDROJ: MATHWORLD.WOLFRAM.COM



Geometrické rozdělení je rozdělení, kdy náhodná veličina X popisuje počet neúspěchů před prvním úspěchem, př. počet hodů kostkou, než padne šestka.

PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE: GEOMETRICKÉ ROZDĚLENÍ

ZDROJ: MATHWORLD.WOLFRAM.COM

Generování:

- ➔ postup vycházející z inverzní transformace: x = celá část [ln(r) / ln(q)]
- ➔ nebo následující algoritmus:
  1. x = 0
  2. vygenerovat náhodné číslo *r*
  3. pokud r < p, pak jdi na 5
  4. x = x + 1, jdi na 2
  5. konec, x je vygenerovaná hodnota z geometrického rozdělení

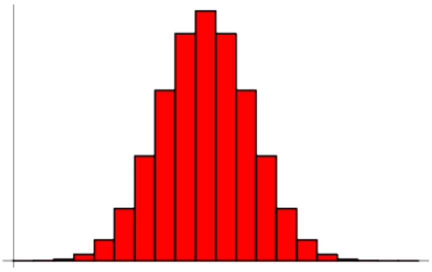
Pascalovo (negativní binomické) rozdělení popisuje počet neúspěchů před *k* úspěchy, př. počet hodů, než třikrát hodíme šestku. Pro *k* = 1 je to geometrické rozdělení. Jde o součet *k* nezávislých geometrických rozdělení.

Binomické rozdělení popisuje počet výskytů jevu A v sérii n nezávislých pokusů, př. Počet hozených šestek v n pokusech.

Generování:

Algoritmus:

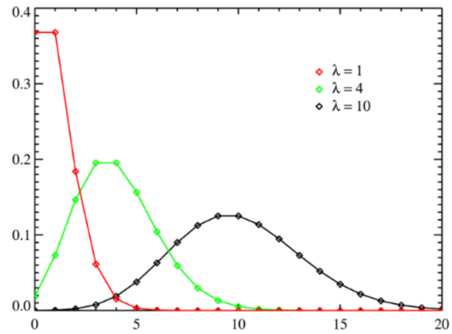
1. x = 0, i = 1
2. vygenerovat náhodné číslo *r*
3. pokud r < p, pak x = x + 1
4. i = i + 1
5. pokud je i ≤ n, jdi na 2., jinak jdi na 6.
6. konec, x je vygenerovaná hodnota z binomického rozdělení



PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE: BINOMICKÉ ROZDĚLENÍ

ZDROJ: MATHWORLD.WOLFRAM.COM

Poissonovo rozdělení zachycuje počet výskytů určitého jevu v určitém časovém intervalu. Střední hodnota počtu výskytů se značí λ. Př. λ = 10 může znamenat, že přijde v průměru 10 lidí za určitý interval času. Je podobné binomickému, ale s tím, že n je velmi velké ($n > 30$) a p velmi malé ($p < 10$).



PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE: POISSONOVO ROZDĚLENÍ

ZDROJ: WIKIPEDIA.ORG

Hypergeometrické rozdělení popisuje počet prvků jednoho druhu (úspěchů), který se vyskytuje v náhodném výběru n prvků bez vracení. Značíme následovně: N je velikost základního souboru, p je pravděpodobnost úspěchu, $M = Np$ je počet úspěchů v základním souboru.

Příklad použití: Máme základní soubor $N = 20$, třeba 20 lidí ve třídě. Z toho je M = 8 dívek, takže P(vyberu dívku) = 8/20 = 0,4. Jaká je pravděpodobnost, že mezi 10 náhodně vybranými dětmi budou právě 2 dívky?

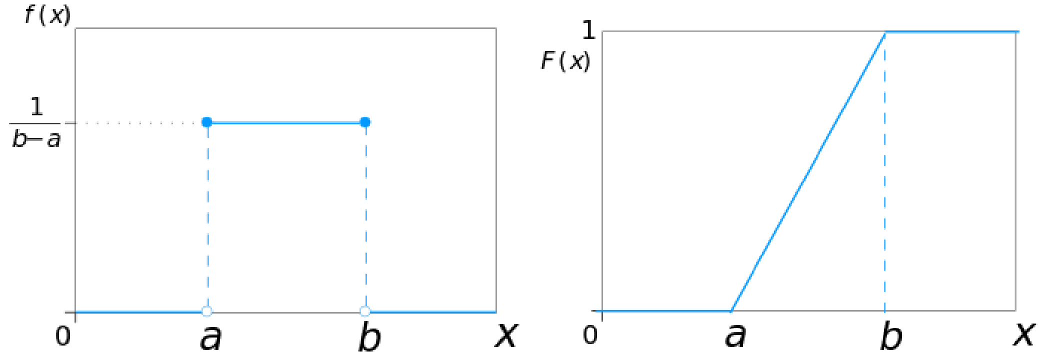
Shrnutí

ROZDĚLENÍ	STŘEDNÍ HODNOTA	ROZPTYL	PRAVDĚPODOBNOSTNÍ FUNKCE
Alternativní	p	pq	P(X) = 1 – p pro X = 0, P(X) = p pro X = 1
Geometrické	q/p	q/p^2	$P(X) = p(1-p)^x$
Pascalovo	kq/p	kq/p^2	$P(X) = \binom{k+nx-1}{k}(1-p)^x p^k$
Binomické	np	npq	$P(X) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$
Poissonovo	λ	λ	$P(X) = \lambda.^x e^{-\lambda} / x!$
Hypergeometrické	np	npq[(N-n)/n-1)]	$P(X) = \frac{\binom{M}{x}\binom{N-M}{n-x}}{\binom{N}{n}}$

JAKÁ EXISTUJÍ SPOJITÁ ROZDĚLENÍ A JAK Z NICH GENEROVAT NÁHODNÉ VELIČINY?

Rovnoměrné rozdělení na intervalu (a,b) má náhodná veličina, která se v tomto intervalu vyskytuje se stejnou pravděpodobností.

Generujeme ho metodou inverzní transformace z náhodného čísla *r* jako: x = a + (b – a)r

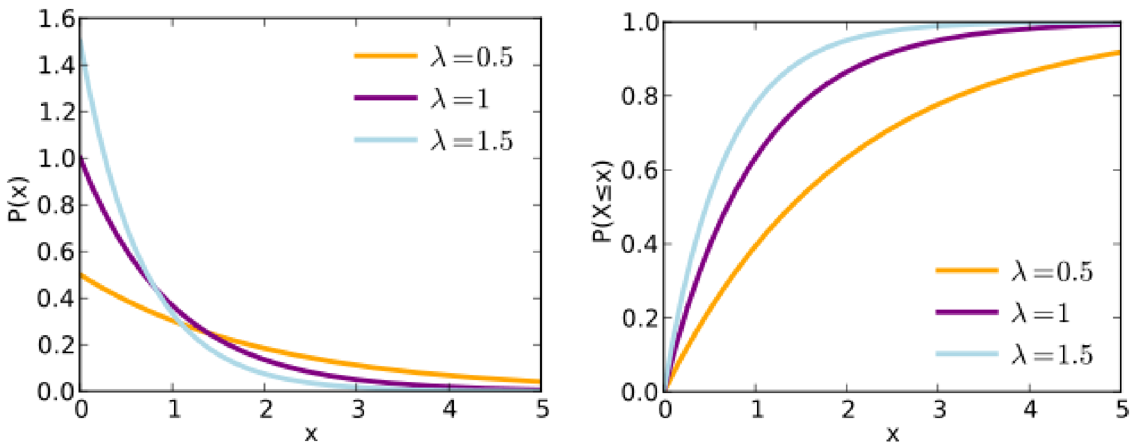


HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI A DISTRIBUČNÍ FUNKCE: ROVNOMĚRNÉ ROZDĚLENÍ

ZDROJ: WIKIPEDIA.ORG

Exponenciální rozdělení popisuje intervaly mezi příchody jednotek. S Poissonovým rozdělením má společný parametr λ. Interval mezi dvěma po sobě jdoucími příchody je 1/ λ. Používáme ho, pokud je pravděpodobnost výskytu jevu během časového intervalu přímo úměrná délce tohoto intervalu a pokud je nastoupení jevu nezávislé na minulosti procesu.

Generujeme ho metodou inverzní transformace z náhodného čísla *r* jako x =$-\frac{1}{\lambda}\ln(1-r)$.



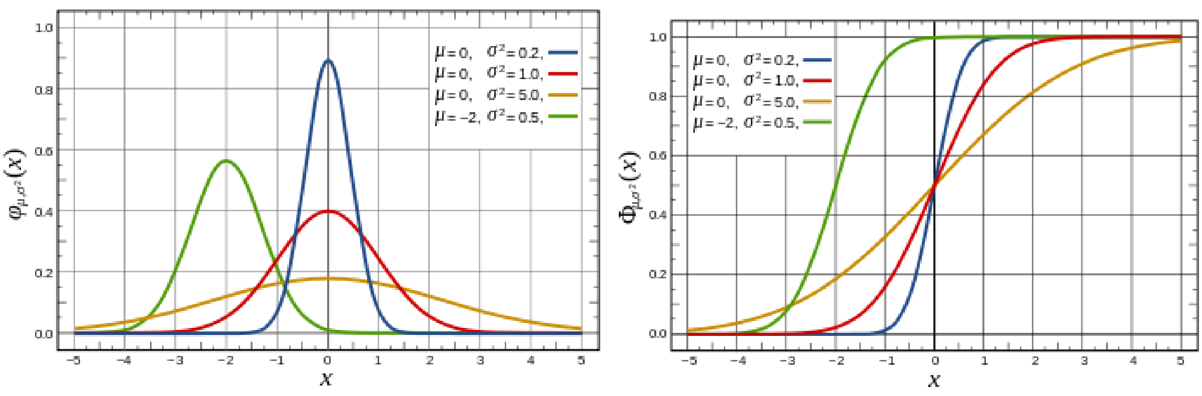
HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI A DISTRIBUČNÍ FUNKCE: EXPONENCIÁLNÍ ROZDĚLENÍ

ZDROJ: WIKIPEDIA.ORG

Nejpoužívanějším rozdělením ve statistice je **normální rozdělení**, které má dva parametry: střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ. Lze jej převést na normované normální rozdělení vztahem Z = (X – μ)/σ.

Generování:

- ➔ Box-Mullerova transformace či upravení Box-Mullerova transformace: vygenerujeme dvě náhodná čísla r_1, r_2. Z nich získáme dvě hodnoty x_1, x_2 z normálního rozdělení vztahem: $x_1 = \sqrt{-2lnr_1}\sin(2\pi r_2)$, $x_2 = \sqrt{-2lnr_1}\cos(2\pi r_2)$.
- ➔ Funkce norm.inv v Excelu, která využívá principu metody inverzní transformace, ale postupuje iterativně.
- ➔ Algoritmy vycházejícími z centrální limitní věty. Například Lindbergerova-Lévyho věta říká, že pokud máme *n* nezávislých náhodných veličin z libovolného rozdělení s průměrem μ a rozptylem σ^2, pak jejich průměr bude mít rozdělení $N(\mu, \sigma^2/n)$, což lze pak snadno převést na normované normální rozdělení. Mohli bychom chtít třeba vygenerovat veličinu z normovaného normálního rozdělení z 20 náhodných čísel $r_1 \ldots r_n$. Víme, že průměr hodnot náhodných čísel je 0,5 a rozptyl = 1/12, a také víme, že normální rozdělení převádíme na normované normální rozdělení vztahem Z = (X – μ)/σ. Spočítáme si tedy výběrový průměr náhodných čísel, který označme $\bar{R}$. Hodnotu z normovaného normálního rozdělení pak získáme jako $x = \frac{\bar{R}-0,5}{\sqrt{12/20}}$.



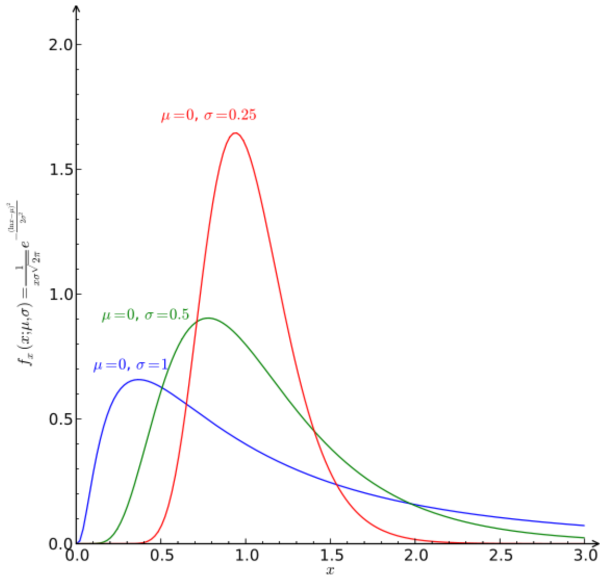
HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI A DISTRIBUČNÍ FUNKCE: NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

ZDROJ: WIKIPEDIA.ORG

Log-normální rozdělení se hodí pro jednostranně ohraničená data (fyzikální veličiny, příjmy). Má také dva parametry, střední hodnotu μ a směrodatnou odchylku σ.

Generování:

> Vygenerujeme náhodnou veličinu X z normálního rozdělení N(μ, σ^2). Náhodná veličina e^X má pak log-normální rozdělení LN(μ, σ^2).



HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI: LOG-NORMÁLNÍ ROZDĚLENÍ

ZDROJ: WIKIPEDIA.ORG

Shrnutí:

ROZDĚLENÍ	STŘEDNÍ HODNOTA	ROZPTYL	HUSTOTA PRAVDĚPODOBNOSTI
Rovnoměrné	(a + b) /2	$(b - a)^2/12$	f(x) = 0 pro x < a, x > b f(x) = 1/(b – a) jinak
Exponenciální	1/ λ	$1/ \lambda^2$	f(x) = $\lambda.^{x}e^{-\lambda}$ pro λ > 0, x > 0
Normální	μ	σ^2	f(x) = $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
Log-normální	μ	σ^2	f(x) = $\frac{1}{x\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

ZDROJE:

Přednášky 4EK421 Simulační modely ekonomických procesů, VŠE Praha, 2013.

Dlouhý, M. a kol.: Simulace podnikových procesů. Computer Press, Brno 2007.