APLIKACE DYNAMICKÝCH MODELŮ V ANALÝZE POPTÁVKY.
LOGISTICKÝ RŮSTOVÝ MODEL. PRUŽNOST NABÍDKY A POPTÁVKY.

Následující text se věnuje modelům poptávky po předmětech dlouhodobé spotřeby. Na tyto modely bychom se měli zaměřit především tehdy,

1) jestliže zvažujeme investice do odvětví vyrábějících předměty dlouhodobé spotřeby (auta, počítače apod). Tato odvětví vykazují značnou pružnost z hlediska spotřebitelské poptávky. Její vývoj je tudíž rozhodující pro výnosnost investice;
2) jestliže chceme pracovat v oboru marketingu a zajímá nás, jak to vypadá s poptávkou po určitém předmětu, tedy zda se již neblíží hladině nasycení, protože v tom případě by bylo dobré zvážit jeho inovaci;
3) jestliže nás zajímá ekonometrie a chceme se dozvědět něco nového;
4) jestliže nás nezajímá ekonometrie, ale chceme udělat státnice.

Začněme nejprve charakteristikou předmětů dlouhodobé spotřeby. Je důležité mít na paměti, že:

- ➔ mají dlouhodobou životnost, postupně se opotřebovávají
- ➔ většinou jsou hrazeny z úspor či z úvěru, mají vysokou cenu

V důsledku toho se podobné předměty **hromadí u spotřebitelů**. Pokud chceme sestavit dobrý model, který nám pomůže odhadnout další vývoj poptávky, musíme tudíž vzít v úvahu nejen nákupy v daném období, nýbrž i **současnou vybavenost** spotřebitelů tímto předmětem. Pro poptávku po předmětech dlouhodobé spotřeby platí, že

- ➔ obvykle nejprve roste a pak klesá, asymptoticky se tedy vybavenost blíží k určité hranici, kterou nazýváme **relativní hladina nasycení**
- ➔ vlivem různých ekonomických faktorů se relativní hladina nasycení může měnit, na rozdíl od **absolutní hladiny nasycení**
- ➔ vybavenost určitým předmětem může i klesat kvůli substitučnímu efektu
- ➔ lze rozlišovat
  - o **čistou poptávku**, která zvyšuje úroveň vybavenosti (první, případně druhé a další vybavení – koupíme si nový mobil, případně dva). Je ovlivněna řadou faktorů ekonomických (příjem, cena, možnost nákupu na splátky, úroková míra, dostatečná zásoba na trhu apod.) i mimekonomických (demografické, móda apod.). **Určujícím faktorem vývoje čisté poptávky je úroveň vybavenosti.**
  - o **renovační poptávku**, která vybavenost nezvyšuje (pokazil se nám mobil, koupíme si nový = **prostá reprodukce**).
- ➔ **absolutní vybavenost** je dána součtem čisté poptávky od uvedení předmětu na trh a měří se celkovým počtem předmětů dlouhodobé spotřeby v používání. Proti tomu **relativní vybavenost** se vyjadřuje množstvím předmětů dlouhodobé spotřeby na 100 či 1 000 obyvatel.

Poptávku po předmětech dlouhodobé spotřeby lze dobře modelovat tzv. logistickým růstovým modelem. Jde o dynamický model, kde jednou (či jedinou) vysvětlovanou je čas.[1] Tento model je vhodný i pro předpověď (pomocí extrapolace v čase).

[1] Existují i jiné modely, např. lognormální růstový model, Gompertzova křivka, Richardsova křivka atd.

LOGISTICKÝ RŮSTOVÝ MODEL

Zajímá nás výše čisté poptávky po určitém předmětu dlouhodobé spotřeby. Pro tuto poptávku je klíčová současná úroveň vybavenosti. Při zkoumání vlivu úrovně vybavenosti na vývoj čisté poptávky budeme abstrahovat od vlivu ekonomických a mimoekonomických faktorů (budeme je považovat za konstantní) a jedinou vysvětlující proměnnou bude čas, takže **vybavenost bude pouze funkcí času**.

Přírůstky vybavenosti (a tedy i čistá poptávka) jsou **přímo úměrné dosažené úrovni vybavenosti**, protože na počátku jej nakupují jen málokteré domácnosti, avšak postupně se s ním začíná seznamovat čím dál více lidí a poptávka roste. To by však znamenalo, že vybavenost poroste donekonečna, což je nesmysl. Protože se však postupně zužuje okruh potenciálních spotřebitelů (abstrahujeme nyní od druhého a dalšího vybavení), růst vybavenosti se postupně zpomaluje a blížíme se hladině nasycení. Model bude mít tedy následující tvar:

$$V_t = \frac{S}{1 + e^{a - bt + u_t}}$$

kde V_t značí **relativní vybavenost** v čase t (obvykle se udává v procentech), S je **hladina nasycení**, t je **čas**. V čase konverguje V_t k hladině nasycení S (obvykle se udává jako 100 %).

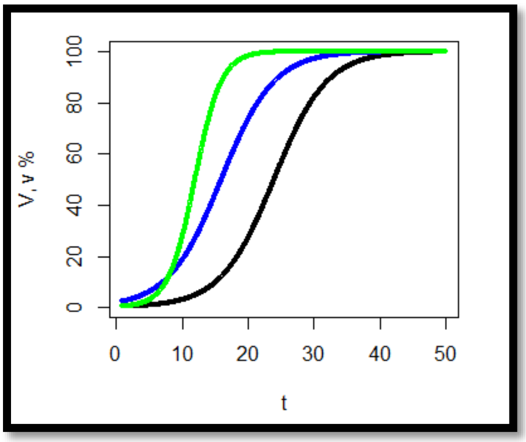
Koeficient a představuje výchozí úroveň vybavení – jde o úrovňovou konstantu.

Koeficient b představuje rychlost nasycování trhu – jde o sklon křivky.

Inflexní bod, tedy čas, kdy je trh nasycen z 50 %, se rovná a / b. Proměnná V_t se nazývá **akcelerační faktor** a výraz [S – V_t] se nazývá **brzdící faktor**.

Graficky zachycuje vývoj tzv. symetrická S-křivka, jejíž dolní asymptotou je 0 a horní asymptotou je hladina nasycení. Na obrázku vidíme tři křivky – poznáte, která je která?[2]

a) $V_t = \frac{S}{1+e^{6-0,25t+u_t}}$ b) $V_t = \frac{S}{1+e^{4-0,25t+u_t}}$ c) $V_t = \frac{S}{1+e^{6-0,5t+u_t}}$



[2] a) černá b) modrá c) zelená

ODVOZENÍ MODELU

Čistá poptávka v období t je vlastně změnou úrovně vybavenosti v intervalu dt: dV_t/dt. Je přímo úměrná:

- ➔ dosažené úrovni vybavenosti V_t (na počátku výrobek kupuje jen málo spotřebitelů, s rostoucí vybaveností se s ním však seznamuje více lidí a chtějí ho také)
- ➔ okruhu potenciálních spotřebitelů $[S - V_t]$ (čím více lidí výrobek už má, tím méně lidí si ho ještě může koupit)

(1) $\frac{dV_t}{dt} = kV_t[S - V_t]$, kde k je konstanta, $S > 0$. Položíme $kS = b$ a přepíšeme to jako $\frac{dV_t}{dt} = \frac{b}{S} V_t[S - V_t]$.

(2) Rovnici upravíme do tvaru: $\frac{dV_t}{V_t} + \frac{dV_t}{[S - Vt]} = bdt$.

(3) Řešíme diferenciální rovnici. Po integraci podle t dostaneme: $lnV_t - ln[S - V_t] + k_1 = bt + k_2$, kde k_1 a k_2 jsou integrační konstanty.

(4) Položíme $k_1 - k_2 = a$ a odlogaritmujeme:

$$lnV_t - ln[S - V_t] + k_1 = bt + k_2$$
$$lnV_t - ln[S - V_t] = bt + k_2 - k_1$$
$$lnV_t - ln[S - V_t] = bt - a$$
$$\frac{V_t}{[S - Vt]} = e^{bt - a}$$

(5) Po algebraické úpravě dostaneme hledaný model:

$$V_t = Se^{bt-a} - V_t e^{bt-a}$$
$$V_t\,(1 + e^{bt-a}) = Se^{bt-a}$$
$$V_t = \frac{Se^{bt-a}}{1+e^{bt-a}}$$
$$V_t = \frac{S}{1+e^{a-bt}}$$

ODHAD MODELU

Jak takový model odhadnout? Můžeme použít buď nelineární metodu nejmenších čtverců, nebo model transformovat a použít metodu nejmenších čtverců. Pokud známe *S*, je to jednoduché: model převedeme následujícího tvaru (výrazu nalevo se říká logit).

$$\ln\left[\frac{S}{V_t} - 1\right] = a - b_t + u_t$$

Pomocí softwaru pak odhadujeme model $Y_t^* = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$.

A co když *S* neznáme? Pak ho musíme také odhadnout. Jedním ze způsobů je **metoda vyrovnání tempa přírůstků (Hottelingova metoda).** Předpokládejme nyní, že máme diskrétní časové intervaly, kde Δt = 1 (sledujeme veličiny vždy po jednom období). Jak bylo uvedeno výše, čistá poptávka v každém období, odpovídající změně v úrovni vybavenosti ΔV_t, je přímo úměrná okruhu potenciálních spotřebitelů a dosažené úrovni relativní vybavenosti, tedy

$$\frac{dV_t}{dt} = kV_t[S - V_t], k \text{ je konstnata}, S > 0$$

Pro Δt = 1 můžeme rovnici přepsat jako $\Delta V_t = kV_t[S - V_t]$.

Za *k* dosadíme *b/S* a po algebraické úpravě dostaneme $\frac{\Delta V_t}{V_t} = b - \frac{b}{S}V_t$.

To je jednoduchý model lineární v parametrech, který lze přepsat jako: $R_t = p + qV_t$, kde

$R_t = \frac{\Delta V_t}{V_t} = \frac{V_{t+1} - V_t}{V_t}$,

$b = p$

$-\frac{b}{S} = q$

Tento model snadno odhadneme MNČ. Hodnoty V_t známe (napozorujeme) a nic dalšího není potřeba. Odhady parametrů *b, S* lze přímo dopočítat z odhadů parametrů *p, q*. Parametr *a* se dopočítá ze vztahu *a* = průměr logitů + *b* krát průměr *t* (logit je pro připomenutí $\ln\left[\frac{S}{V_t} - 1\right]$).

Jinou metodou je **metoda Tinterova**. Pracuje s reciprokou hodnotou úrovně vybavenosti $Z_t = 1 / V_t$. Odhaduje parametry ze vztahu

$$Z_{t+1} = \frac{1 - e^{-b}}{S} + e^{-b}Z_t,$$

a parametr *a* dopočítává stejně jako výše uvedená metoda. Často vede k podhodnocení *S*.

ZAHRNUTÍ EKONOMICKÝCH FAKTORŮ

Někdy časová řada čisté poptávky (přírůstku vybavenosti) není symetrická, ale pozitivně sešikmená. Příčinou jsou různé ekonomické a jiné faktory, které může bychom v tom případě měli do modelu zahrnout. Obvykle se do modelu zahrnuje proměnná příjem, která má velký vliv zejména u luxusních statků. Většinou se vychází z myšlenky, že ne všichni spotřebitelé si mohou okamžitě předmět koupit, ale postupně se s růstem příjmů **okruh potenciálních spotřebitelů rozšiřuje,** takže se **mění relativní hladina nasycenosti**. Relativní hladina nasycení $S(Y_t)$ se tedy stává funkcí příjmu a je proměnlivá až do doby, než dosáhne absolutní hladiny nasycení S_0. Pak ani už růst příjmů nezvýší úroveň vybavenosti. Bude tedy platit, že:

- čistá poptávka (změna v úrovni vybavenosti) je přímo úměrná dosažené **úrovni vybavenosti** V_t a **podílu potenciálních spotřebitelů na proměnlivé hladině nasycenosti** (v původní verzi šlo o okruh potenciálních spotřebitelů, ten se teď ale může měnit), tedy:

  $\frac{dV_t}{dt} = bV(t)\frac{[S(Y_t)-V_t]}{S(Y_t)}$, kde b je konstanta a $S(Y_t)$ je hladina nasycení **při příjmu Y_t**

- relativní úroveň vybavenosti závisí na absolutní úrovni vybavenosti a na příjmové pružnosti poptávky.

$$S(Y_t) = \frac{S_0}{1+\frac{c}{Y_t^{\alpha}}}$$

kde α je koeficient dlouhodobé příjmové pružnosti poptávky a c je konstanta. Relativní úroveň vybavenosti tedy konverguje k absolutní. Vliv rostoucího příjmu na proměnlivou hladinu nasycení systematicky zeslabuje. Například uvažujme c =10. Pak při malém důchodu Y_t^{α} = 10 by relativní hladina nasycení odpovídala jen polovině té absolutní, neboť $S(Y_t) = \frac{S_0}{1+\frac{10}{10}} = 0{,}5S_0$. Při vysokém důchodu 1 000 000 by se však absolutní a relativní hladina nasycení by se tak téměř rovnaly, neboť jmenovat by se blížil jedné, takže $S(Y_t) = 0{,}999S_0$. Dosadíme-li druhou rovnici do první (za $S(Y_t)$), dostaneme model ve tvaru

$$\frac{dV_t}{dt} = bV_t - \frac{b}{S_0}{V_t}^2(1 + cY_t^{-\alpha})$$

Vliv úrovně příjmu na poptávku závisí hlavně na velikosti koeficientu dlouhodobé **příjmové pružnosti poptávky** α, který je většinou u předmětů dlouhodobé spotřeby větší než 1.

- když je α vysoké, okruh potenciálních spotřebitelů rychle roste
- když je α nízké, okruh potenciálních spotřebitelů roste jen pozvolna
- když je α = 0, příjem vůbec nemá vliv na hladinu nasycenosti
- musíme ho odhadnout před odhadem samotného modelu (z časové řady prodeje předmětu)
- když je c = 0, pak se příjem během sledovaného období nemění, a výsledkem je jednoduchý model, který byl odvozen výše

Pozitivně sešikmenou *S*-křivku tedy dostaneme v případě kladné pružnosti poptávky a rostoucího příjmu. Abychom model odhadli, musíme kromě úrovně vybavení zjistit i informace o úrovni příjmu a jeho vývoji. Při predikci poptávky tedy musíme predikovat i budoucí příjem. Model odhadujeme NMNČ, nebo MNČ po logaritmické transformaci[3].

$$y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2$$

kde y = $\Delta\frac{V_t}{V_t}$, $b_0 = b$, $x_1 = V_t$, $b_1 = -\frac{b}{S_0}$, $x_2 = V_tY_t^{-\alpha}$, $b_2 = -\frac{bc}{S_0}$,

[3] Odvození viz Hušek (200), str. 22-23

PODROBNĚJI K PRUŽNOSTI

1) Cenová elasticita poptávky (E_{PD})je citlivost poptávky na cenu za předpokladu, že ostatní faktory se nemění. Je záporná (kladná je jen v případě tzv. Giffenova paradoxu). Říká, o kolik % se změní poptávané množství X, když se cena P změní o 1 %

$$oblouková\_elasticita : E_{PD} = \frac{\frac{X_2 - X_1}{X_2 + X_1}}{\frac{P_{X2} - P_{X1}}{P_{X2} + P_{X1}}};$$

$$elasticita\_v\_bodě : E_{PD} = \frac{\frac{\delta X}{X}}{\frac{\delta P_X}{P_X}} = \frac{\delta X}{\delta P_X} \cdot \frac{P_X}{X}$$

➔ vliv na cenovou elasticitu poptávky má**:**

- povaha statku (luxusní statky mají větší elasticitu).
- blízkost a dostupnost substitutů (elasticita po statku s větším množstvím substitutů je větší)
- podíl výdajů na daný statek na celkovém důchodu (elastičtější je poptávka po statku, který představuje větší podíl výdajů)
- čas (elasticita roste s delším časovým horizontem)

2) Důchodová elasticita poptávky (E_{ID}) vyjadřuje citlivost poptávky na změny důchodu. Říká, o kolik procent se změní poptávané množství statku X, když se změní důchod spotřebitele o 1 % za jinak stejných podmínek (především se nemění ceny).

- normální statky E_{ID} čísla kladná
  - nezbytné statky $\Rightarrow E_{ID}$ = (0,1)
  - pokud $E_{ID} \to 0$ nebo E_{ID} = 0 $\Rightarrow$ spotřeba nezávisí na důchodu)
  - luxusní statky $\Rightarrow E_{ID}$ > 1 (nakupované množství roste rychleji než důchod)
- méněcenné statky E_{ID} čísla záporná

3) Křížová elasticita poptávky představuje procentní změnu poptávaného množství statku X při procentní změně ceny statku Y za jinak stejných podmínek.

4) Elasticita nabídky E_{PS} je míra, v jaké firmy reagují změnou svého výstupu na změnu tržní ceny

➔ $E_{PS} = \frac{\frac{\delta Q}{Q}}{\frac{\delta P}{P}} = \frac{\delta Q}{\delta P} \cdot \frac{P}{Q}$ - nabízené množství je rostoucí funkcí ceny => E_{PS} dosahuje kladných hodnot

PŘÍKLAD

Odhadujeme závislost poptávky po grafických tabletech v čase pomocí modelu $V_t = \frac{100}{1+e^{a-bt+u_t}}$.
Zapište, v jakém tvaru musí model být, abychom jej mohli odhadnout MNČ. ____________

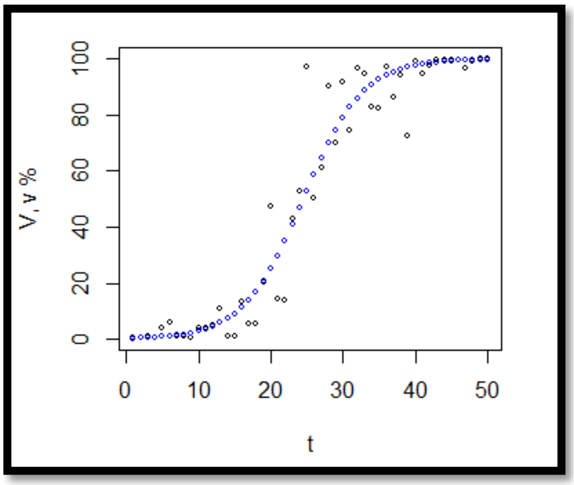
Výstup je zde, pod ním je graf (černě jsou napozorované hodnoty, modře vyrovnané).

```
Call:
lm(formula = logit ~ t)

Residuals:
    Min      1Q  Median      3Q     Max 
-3.3533 -0.7648 -0.0748  0.8710  2.5216 

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)    
(Intercept)  5.93929    0.33577   17.69   <2e-16 ***
t           -0.24212    0.01146  -21.13   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

Residual standard error: 1.169 on 48 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9029,    Adjusted R-squared:  0.9009 
F-statistic: 446.4 on 1 and 48 DF,  p-value: < 2.2e-16
```



Zapište odhadnutý model ve tvaru $V_t = \frac{100}{1+e^{a-bt+u_t}}$. ____________________
Je proměnná čas v modelu statisticky významná? ____________________
Ve kterém roce bude trh nasycen z 50 %? ____________________
Jaká bude úroveň vybavenosti na počátku dvacátého roku? ____________________

Odpovědi:
Model odhadujeme ve tvaru $ln\left[\frac{100}{V_t} - 1\right] = a - b_t + u_t$. *Do softwaru zadáme model* $Y_t{}^* = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$.
Odhadnutý model lze zapsat jako $V_t = \frac{100}{1+e^{5,9-0,24t+u_t}}$
Proměnná čas je v modelu statistiky významná.
Trh bude nasycen z 50 % ve 25. roce, protože 5,9 / 0,24 = 24,6.
Na počátku dvacátého roku bude úroveň vybavenosti 25 %.

SKRIPT

```
V1 = S/(1 + exp(6 -0.25*t))
V2 = S/(1 + exp(4 -0.25*t))
V3 = S/(1 + exp(6 -0.5*t))
plot( V1~t, cex = 0.5,ylab = "V, v %")
points(V2~t, cex = 0.5, col = "blue")
points(V3~t, cex = 0.5, col = "green")

#priklad
t = seq(1:50)
S = rep(100,50)
V = S/(1 + exp(6 - 0.25*t+rnorm(50)))
plot( V~t, cex = 0.5,ylab = "V, v %")
logit = log((S/V)-1)
regrese = lm(logit ~t)
summary(regrese)
fit =  S/(1 + exp(regrese$coef[1]+regrese$coef[2]*t))
points(fit, col = "blue",cex =0.5)
```

ZDROJE

Krkošková, Š., Ráčková, A., Zouhar, J.: Základy ekonometrie v příkladech. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2010.

Hušek, R.: Aplikovaná ekonometrie. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2009.

Hořejší, B., Soukupová, J., Macáková, L., Soukup, J.: Mikroekonomie. Management Press, Praha 2008.