METODY ODHADU REDUKOVANÉHO A STRUKTURNÍHO TVARU MODELŮ SIMULTÁNNÍCH ROVNIC.

ZÁKLADNÍ HARRODŮV-DOMARŮV MODEL RŮSTU A JEHO VERZE VE FORMĚ MULTIPLIKÁTOR – AKCELERÁTOR.

Parametry modelu simultánních rovnic ve strukturním tvaru nelze odhadovat metodou nejmenších čtverců, protože nejsou splněny GM předpoklady, konkrétně předpoklad, že model obsahuje pouze deterministické vysvětlující proměnné. Odhady by tak nebyly nestranné ani konzistentní. Pomocí přímé aplikace MNČ můžeme odhadovat jen rekurzivní modely MSR. V případě interdependentních MSR je potřeba postupovat jinak.

ODHAD PARAMETRŮ STRUKTURNÍHO TVARU

METODY S OMEZENOU INFORMACÍ

Metody s omezenou informací odhadují parametry jednotlivých simultánních rovnic. Nezohledňují informace z ostatních rovnic, nejsou tedy tak náročné na počet pozorování. Jsou jednodušší a v praxi používanější než metody s úplnou informací. Patří sem metoda dvoustupňových nejmenších čtverců, metoda nepřímých nejmenších čtverců a metoda maximální věrohodnosti s omezenou informací.

I. **Metoda dvoustupňových nejmenších čtverců** se dá použít pro přesně identifikované nebo přeidentifikované rovnice. Jak bylo uvedeno výše, problémem MSR je přítomnost stochastických vysvětlujících proměnných. Postupujeme tedy tak, že tyto proměnné nahradíme jejich vyrovnanými, nestochastickými hodnotami, které získáme pomocí MNČ z neomezeného redukovaného tvaru. Tyto vyrovnané hodnoty už nejsou zkorelované s náhodnou složkou. Poté už tedy můžeme parametry v původní rovnici odhadnout metodou nejmenších čtverců.

Uvažujme *i*-tou rovnici modelu simultánních rovnic $\mathbf{y}_i = \mathbf{Y}_i\boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{X}_i\boldsymbol{\gamma}_i + \mathbf{u}_i$, kde $\mathbf{y}_i$ je vektor stochastických proměnných této vysvětlované rovnice, $\mathbf{X}_i$ značí predeterminované proměnné obsažené v této rovnici a $\mathbf{Y}_i$ stochastické vysvětlující endogenních proměnné v této rovnici.

Nejprve je potřeba nahradit vysvětlují endogenní proměnné nějakými pomocnými, nestochastickými proxy proměnnými, které budou silně zkorelované s $\mathbf{Y}_i$, ale zároveň nebudou závislé na náhodné složce. Můžeme je tedy nahradit proměnnými $\widehat{\mathbf{Y}}_i$, které získáme jako vyrovnané hodnoty z odhadu neomezeného redukovaného tvaru $\mathbf{Y}_i = \mathbf{X}\boldsymbol{\Pi}_i + \mathbf{V}_i$, metodou nejmenších čtverců, kde $\mathbf{X}$ značí matici všech predeterminovaných proměnných obsažených v MSR a $\mathbf{V}_i$ značí matici náhodných složek redukovaného tvaru.

Pokud matici reziduí odhadnutého neomezeného redukovaného tvaru označíme $\widehat{\mathbf{V}}_i$, tak můžeme psát $\mathbf{Y}_i = \widehat{\mathbf{Y}}_i + \widehat{\mathbf{V}}_i$. Když dosadíme do rovnice výše nestochastické hodnoty $\widehat{\mathbf{Y}}_i + \widehat{\mathbf{V}}_i$ za stochastické $\mathbf{Y}_i$ a rovnici přepsat jako $\mathbf{y}_i = (\widehat{\mathbf{Y}}_i + \widehat{\mathbf{V}}_i)\boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{X}_i\boldsymbol{\gamma}_i + \mathbf{u}_i$, tedy:

$$\mathbf{y}_i = \widehat{\mathbf{Y}}_i\boldsymbol{\beta}_i + \mathbf{X}_i\boldsymbol{\gamma}_i + \mathbf{u}_i^* \qquad \text{kde } \mathbf{u}_i^* = \mathbf{u}_i + \widehat{\mathbf{V}}_i\,\boldsymbol{\beta}_i$$

Tento model již můžeme odhadnout pomocí MNČ, protože neobsahuje vysvětlující proměnné závislé na náhodné složce $\mathbf{u}_i^*$.

Odhadová funkce M2NČ poskytuje **konzistentní a asymptoticky vydatné** odhady. Neposkytuje ale nestranné ani vydatné odhady. Označme $\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{i}} = [\hat{\mathbf{Y}}_{\mathbf{i}}, \mathbf{X}_{\mathrm{i}}]$. Pak má odhadová funkce tvar $(\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{i}}' \hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{i}})^{-1} \hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{i}}' \mathbf{y}_{\mathrm{i}}$. Odhad kovarianční matice strukturních parametrů získáme jako $s_i^2(\hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{i}}' \hat{\mathbf{Z}}_{\mathbf{i}})^{-1}$, přičemž při odhadu rozptylu náhodné složky s_i^2 pracujeme s vektorem reziduí původní strukturní rovnice.

Příklad:

Máme model ve strukturním tvaru:

$Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 Y_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + u_{1t}$

$Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 Y_{1t} + \beta_2 X_{2t} + u_{2t}$

1) *Převedeme jej na redukovaný tvar, kde napravo budou všechny predeterminované proměnné:*
   $Y_{1t} = \pi_{11} + \pi_{12} X_{1t} + \pi_{13} X_{2t} + v_{1t}$
   $Y_{2t} = \pi_{21} + \pi_{22} X_{1t} + \pi_{23} X_{2t} + v_{2t}$
2) *Ten odhadneme a uložíme vyrovnané hodnoty* $\hat{Y}_{1t}, \hat{Y}_{2t}$
3) *Tyto hodnoty dosadíme do původní rovnice a odhadujeme model:*
   $Y_{1t} = \alpha_0 + \alpha_1 \hat{Y}_{2t} + \alpha_2 X_{1t} + u_{1t} + \alpha_1 v_{2t}$
   $Y_{2t} = \beta_0 + \beta_1 \hat{Y}_{1t}, + \beta_2 X_{2t} + u_{2t} + \beta_1 v_{1t}$

II. **Metoda nepřímých nejmenších čtverců** se hodí pro přesně identifikované MSR. Postupujeme tak, že nejprve odhadneme parametry redukovaného tvaru a z nich pak dopočítáme strukturní koeficienty. Když je model přesně identifikovaný, dostaneme tak jediné možné řešení. Odhady strukturních koeficientů jsou pak konzistentní a asymptoticky vydatné, ale pro malé výběry nejsou nestranné ani vydatné.

III. **Metoda maximální věrohodnosti s omezenou informací** se může použít tehdy, když jsou náhodné složky strukturního tvaru sériově nezávislé a normálně rozdělené a když je rovnice přesně identifikovaná nebo přeidentifikovaná. Maximalizujeme věrohodnost libovolné strukturní rovnice vzhledem k apriorním omezením parametrů této rovnice. Je výpočetně složitější než M2NČ a MNNČ. Poskytuje konzistentní, asymptoticky vydané, ale nikoli nestranné odhady.

METODY S ÚPLNOU INFORMACÍ

Metody s úplnou informací odhadují parametry všech rovnic najednou. Berou tedy v úvahu informace ve všech rovnicích, ale zase vyžadují více pozorování, jsou výpočetně náročnější a také velmi citlivé na specifikační chyby (chyba se rozšíří do odhadu všech rovnic). Patří sem metoda třístupňových nejmenších čtverců a metoda maximální věrohodnosti s úplnou informací.

I. Metoda třístupňových nejmenších čtverců je výpočetně jednodušší než MMVÚI a dáváme jí přednost, když nemáme k dispozici apriorní informace o omezeních kovarianční matice. První dva stupně jsou stejné jako u M2NČ. Ve třetím stupni se opakovaně odhadnou všechny strukturní parametry pomocí MZNČ s využitím apriorních omezení koeficientů všech rovnic a kovarianční matice náhodných složek odhadnuté z reziduí spočtených ve druhém stupni.

II. Metoda maximální věrohodnosti s úplnou informací je ve stejném vztahu k MMVOI jako M3NČ k M2NČ. Je výpočetně náročnější než M3NČ, ale může poskytnout vydatnější odhady za předpokladu, že známe apriorní omezení prvků kovarianční matice.

ODHAD PARAMETRŮ REDUKOVANÉHO TVARU

Model ve strukturním tvaru zapíšeme jako $\mathbf{YB} + \mathbf{X\Gamma} = \mathbf{U}$.
Model v neomezeném redukovaném tvaru zapíšeme jako $\mathbf{Y} = \mathbf{\Pi X} + \mathbf{V}$, kde $\mathbf{\Pi} = -\mathbf{B}^{-1}\mathbf{\Gamma}$.

Někdy nás zajímají parametry tohoto redukovaného tvaru, a to nejen k dopočítání parametrů strukturního tvaru, ale třeba i při prognózování, volbě hospodářské politiky, simulacích apod. Parametry redukovaného tvaru můžeme odhadnout přímo nebo nepřímo. Pokud jsou všechny strukturní rovnice přesně identifikované, dávají oba postupy stejný výsledek. Pokud jsou některé rovnice přeidentifikované, není MNČ schopná využít veškerou dostupnou informaci (nebere v úvahu přeidentifikující omezení parametrů strukturního tvaru) a nepřímý odhad bývá obvykle asymptoticky vydatnější.

Při přímém odhadu parametrů postupujeme tak, že na model v neomezeném redukovaném tvaru použijeme **přímo** MNČ. Odhadová funkce parametrů neomezeného redukovaného má pak tvar $\mathbf{\Pi}^* = (\mathbf{X'X})^{-1}\mathbf{X'Y}$. Pokud jsou náhodné složky nezávislé a normálně rozdělené, je tato odhadová funkce je konzistentní a asymptoticky normálně rozdělená.

Při nepřímém odhadu parametrů postupujeme tak, že odhadneme parametry **B** a **Γ** některou z metod omezené či úplné informace a pak odhad parametru **Π** dopočítáme ze vztahu $\widetilde{\mathbf{\Pi}} = -\hat{\mathbf{\Gamma}}\hat{\mathbf{B}}^{-1}$. Pro konzistentní odhady $\hat{\mathbf{\Gamma}}$ a $\hat{\mathbf{B}}$ je tato odhadové funkce také konzistentní a asymptoticky normálně rozdělená. Pokud je MSR přeidentifikovaný, pak nepřímý odhad s využitím metod úplné informace bude asymptoticky vydatnější než při použití metod s omezenou informací, protože využijeme veškerou dostupnou informaci.

JAK VYBRAT, KTEROU METODU POUŽÍT?

Kritéria, podle kterých se řídíme, jsou například:

- Jaké mají být vlastnosti odhadnutých parametrů? (konzistence, nestrannost…)
- Jaká máme data a kolik?
- Jsou rovnice MSR identifikované? Jaké jsou vazby mezi endogenními proměnnými?
- K čemu hodláme model využít?
- Máme nějaké apriorní informace o omezeních strukturních parametrů?
- Je zvolená odhadová technika robustní?

Vlastnosti shrnuje následující tabulka, přičemž uvažujeme velké výběry (asymptotické vlastnosti):

Přímé použití MNČ	Interdependentní strukturní MSR → vychýlené, nekonzistentní ☹ Rekurzivní MSR → nestranné, konzistentní, vydatné ☺ Neomezený redukovaný tvar MSR → nestranné, konzistentní, vydatné ☺
ÚPLNÁ INFORMACE **M3NČ** **MMVÚI**	Interdependentní strukturní MSR → je-li některá rovnice přeidentifikovaná, jsou vydatnější než odhady metodami omezené informace ☺ (pokud máme k dispozici informaci o apriorních omezeních kovarianční matice, je lepší MMVÚI, protože je asymptoticky vydatnější, jinak M3NČ, která je jednodušší). Jsou ale citlivější na specifikační chyby (chyba se rozšíří do všech rovnic), výpočetně náročnější a vyžadují více pozorování ☹
OMEZENÁ INFORMACE **M2NČ** **MNNČ** **MMVOI**	Interdependentní strukturní MSR → odhady nejsou nestranné, ale jsou konzistentní a asymptoticky vydatné ☺ Nejefektivnější bývá většinou M2NČ, které se dává přednost. Pokud je rovnice přesně identifikovaná, budou výsledky stejné jako při použití M3NČ a MNNČ.

HARRODŮV-DOMARŮV MODEL

Harrodův-Domarův model vznikl ve 40. letech a mezinárodní finanční instituce ho využívaly po celou druhou polovinu 20. století. Jde o **model hospodářského růstu**. V dnešní době dobře vysvětluje situaci rozvojových zemí, v rozvinutých zemích nemá příliš uplatnění. Klíčovým prvkem těchto modelů je agregátní produkční funkce. Hlavními předpoklady modelu jsou:

- ➔ konstantní výnosy z rozsahu
- ➔ neexistuje technologický pokrok
- ➔ nelze zaměňovat práci a kapitál (**neexistuje substituce práce a kapitálu**), tedy $Y = \min[aK, bL]$. Produkční funkci můžeme tudíž psát jako $Y = aK$.

Kapitálovou náročnost produkce vyjádříme jako $v = K/Y = \Delta K/\Delta Y$. Koeficient v bývá označován jako kapitálový koeficient nebo **akcelerátor**. Říká, o kolik se zvýší poptávka po investicích, pokud důchod vzroste o jednotku. Zásoba kapitálu se zvyšuje díky investicím, tedy $\Delta K = I$. **Investice jsou funkcí důchodu** = princip akcelerátoru:

$$I = v\Delta Y$$

Převrácené hodnotě parametru v se říká efektivnost kapitálu: $a = 1/v$.

Investice jakožto změna zásoby kapitálu jsou hrazeny z úspor, které závisí na velikosti produkce a na průměrném sklonu k úsporám s: $S = sY$. V souladu s keynesiánským modelem předpokládáme rovnost úspor a investic **S = I.** Takže platí

$$I = sY$$

S růstem investic dochází k růstu produktu, a to ve větším, neboli multiplikovaném rozsahu, než byl původní přírůstek investic. Tento zvětšený účinek investic se nazývá multiplikační efekt investičních výdajů (**investiční multiplikátor**): $\Delta Y = (1/s)\Delta I$.

Tempo růstu produkce označme jako g a platí pro něj: $g = \Delta Y/Y = (I/v) / Y = sY/ vY = (s/v)$

$$g = (s/v) = sa.$$

Tedy tempo růstu produkce se rovná míra úspor děleno kapitálová náročnost = míra úspor krát efektivnost kapitálu. Tempo růstu se zvyšuje s rostoucí mírou úspor a s klesajícím kapitálovým koeficientem. Je kladen velký důraz na úspory a na akumulaci kapitálu jakožto zdroj růstu. Do modelu se často zahrnuje i opotřebení kapitálu δ: $I = sY - \delta K$. Pak platí $g = (s/v) - \delta$.

Tomuto tempu růstu říkáme „zaručené tempo růstu.“ Značí se G_W. Je to takové tempo růstu, při kterém se dosahuje požadované efektivity kapitálu (očekávané využití kapacit).

Základní myšlenkou HD modelu je nesoulad mezi zaručeným, přirozeným a skutečným tempem růstu.

- ➔ G_A = skutečné tempo růstu je takové, kterého ekonomika reálně dosahuje
- ➔ G_W = zaručené tempo růstu je takové, při kterém je dosaženo požadované efektivity kapitálu, při tomto tempu růstu je ekonomika v rovnováze, AD = AS.
- ➔ G_N = přirozené tempo růstu se rovná součtu tempa růstu pracovní síly a její produktivity. Při růstu populace (pracovní síly) či její produktivity se zvyšuje potenciální produkt. Udržuje se plná zaměstnanost (= dosahuje se potenciálního produktu).

Aby byla ekonomika v rovnováze, měla by se tempa růstu rovnat.

1) Pokud je přirozený růst vyšší než zaručený, pak dojde k růstu strukturální nezaměstnanosti (bude moc lidí na málo kapitálu – poměr práce a kapitálu je dle předpokladů fixní, nebude dost strojů), ale zároveň i k inflačním tlakům.
2) Pokud je přirozený růst nižší než zaručený, není k dispozici dost lidí vzhledem ke kapacitě kapitálu (strojů). Investice a důchod klesají.
3) Pokud je skutečný růst vyšší než zaručený, roste ekonomika rychleji, než jak rostou kapitálové kapacity, dochází k nadměrnému využití kapacit a přetěžování strojů. Systém je nestabilní, nerovnováha se prohlubuje.
4) Pokud je skutečný růst nižší než zaručený, vyrábí se více, než ekonomika požaduje. Kapacity nejsou dostatečně využity, investice klesají.

K rovnosti skutečného, zaručeného a přirozeného tempa růstu přitom prakticky nikdy nedochází – hovoří se o **rovnováze na ostří nože**. Zároveň neexistuje mechanismus, který by navrátil ekonomiku do rovnováhy.

ZDROJE

Hušek, R: Ekonometrická analýza. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2007.

Krkošková, Š., Ráčková, A., Zouhar, J.: Základy ekonometrie v příkladech. Nakladatelství Oeconomica, Praha 2010.

Soukup, J., Pošta, V., Neset, P., Pavelka, T., Dobrylovský, J.: Makroekonomie. Moderní přístup. Management Press, 2007.