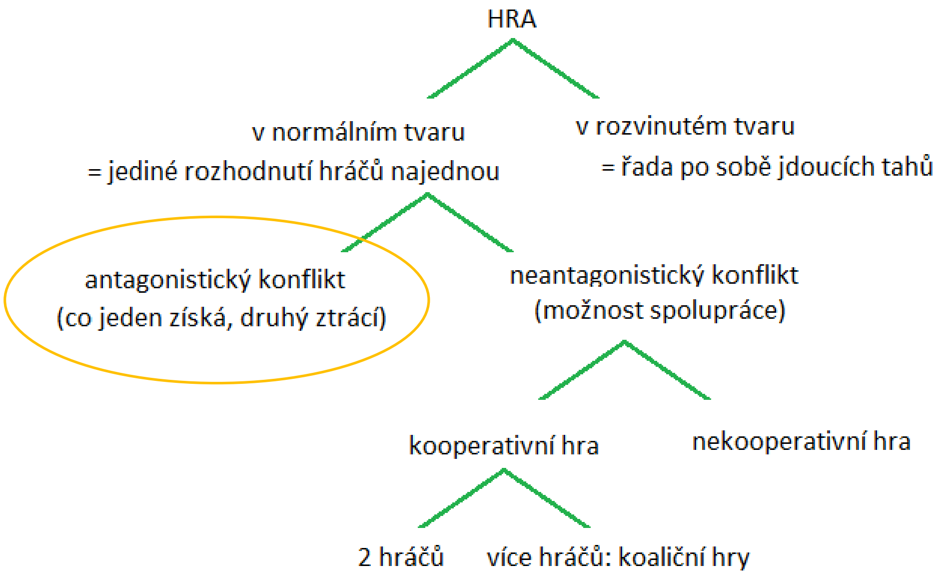
MATICOVÉ HRY

FORMULACE, KONCEPCE ŘEŠENÍ, SMÍŠENÉ ROZŠÍŘENÍ MATICOVÝCH HER, ZÁKLADNÍ VĚTA MATICOVÝCH HER

CO JE TO TEORIE HER A ČÍM SE ZABÝVÁ?

Teorie her je ekonomická vědní disciplína, která se zabývá studiem konfliktních situací. Konflikty bychom mohli zjednodušeně rozdělit takto:



JAK SI PORADIT S ANTAGONISTICKÝM KONFLIKTEM?

Hra v normálním tvaru je dána:

- **množinou hráčů** $\{1, 2, \ldots, N\}$,
- **množinou prostorů strategií** $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$, kde X_i označuje prostor strategií i-tého hráče,
- **množinou výplatních funkcí** $\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_N), f_2(x_1, x_2, \ldots, x_N), \ldots, f_N(x_1, x_2, \ldots, x_N)\}$.

Předpokládáme, že tito hráči jsou inteligentní: snaží se maximalizovat svůj užitek (hodnotu výplatní funkce) a mají dokonalé informace o hře, tedy znají množinu hráčů, svůj prostor strategií a výplatní funkci a prostor strategií a výplatní funkci ostatních hráčů.

V následujících příkladech půjde pro zjednodušení o hru dvou hráčů: prostor strategií prvního hráče budeme značit X, prostor strategií druhého hráče pak Y, výplatní funkce prvního hráče bude $f_1(x,y)$, výplatní funkce druhého hráče bude $f_2(x,y)$. Jde o hru v normálním tvaru a o antagonistický konflikt: hráči tedy udělají své rozhodnutí najednou, a to, co jeden získá, druhý ztratí, takže nemá smysl spolupracovat.

Proto se tento typ hry nazývá také hra s konstantním součtem $(f_1(x,y) + f_2(x,y) = K)$, nebo hra s nulovým součtem $(f_1(x,y) + f_2(x,y) = 0)$. Každou hru s konstantním součtem můžeme totiž převést na hru s nulovým součtem, protože přičtením libovolné konstanty ke všem hodnotám výplatních funkcí se nezmění řešení hry. Z toho plyne, že $f_1(x, y) = -f_2(x, y) \equiv f(x, y)$. Budeme tedy sledovat výhru prvního hráče, a to bude zároveň i prohra druhého hráče.

Hru můžeme uspořádat do matice:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

První hráč (X) volí řádek, má tedy m možných strategií x_1 až x_m a získá a_{ij}. Druhý hráč (Y) volí sloupec, má tedy n možných strategií y_1 až y_n a ztratí a_{ij}. Prostor strategií je konečný, celkem existuje m · n různých kombinací. Každé kombinaci strategií lze přiřadit výhru $f(x, y)$.

DOMINOVANOST

Žádný z hráčů určitě nezvolí **silně dominovanou strategii**. První hráč nebude volit řádek se všemi prvky **menšími**, než jsou odpovídající prvky v jiném řádku (měl by s jistotou nižší zisk), druhý hráč nebude volit sloupec se všemi prvky **většími**, než jsou odpovídající prvky v jiném sloupci (měl by s jistotou vyšší ztrátu). Výjimečně lze vypuštěním silně dominovaných strategií najít i řešení hry, většinou se nám však tímto způsobem pouze podaří redukovat rozměr matice hry.

Slabá dominovanost znamená, že prvky v odpovídajícím řádku jsou **menší nebo rovny** prvkům v jiném řádku (1. hráč) či prvky v odpovídajícím sloupci jsou **větší nebo rovny** prvkům v jiném sloupci (2. hráč).

Například v následující matici by první hráč určitě nezvolil třetí řádek, získal by totiž určitě méně než při volbě jiných řádků, nehledě na to, jakou strategii by zvolil druhý hráč. Druhý hráč naopak určitě nebude volit první sloupec, ztratil by totiž určitě více než při volbě jiných sloupců, nehledě na to, co by zvolil první hráč. Když tyto strategie vypustíme, zbude nám matice 2x2, ve které by první hráč určitě nezvolil druhou strategii a druhý hráč by určitě nezvolil první strategii. Optimálními strategiemi jsou tedy x_1, y_3, kdy první hráč získá 3 a druhý hráč ztratí 3.

$$\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} & 4 & 3 \\ & 3 & 2 \\ & & \end{pmatrix}$$

ROVNOVÁHA V RYZÍCH STRATEGIÍCH

Návod, jak najít optimální strategii hráčů v maticové hře, dává tzv. **Nashova rovnováha**. Ta říká, že pokud se některý z hráčů odchýlí od své optimální strategie (zatímco soupeř se své optimální strategie bude držet), nepolepší si, neboli pokud se hráč nedrží optimální strategie, pohorší si a v nejlepším případě na tom bude stejně. Pro optimální strategie $x^o \in X, y^o \in Y$ tedy platí:

- $f_1(x, y^o) \leq f_1(x^o, y^o)$ = když se první odchýlí optimální strategie x^o a volí místo toho strategii x, zatímco druhý se své optimální strategie drží, tak získá méně či nejvýše stejně, jako kdyby se jí také držel
- $f_2(x^o, y) \leq f_2(x^o, y^o)$ = když se druhý odchýlí optimální strategie y^o a volí místo toho strategii y, zatímco první se své optimální strategie drží, tak získá méně či nejvýše stejně, jako kdyby se jí také držel
- Pro hru s nulovým součtem platí, že $f_1(x, y) \equiv f(x, y)$ a $f_2(x, y) \equiv -f(x, y)$, a tedy
- $f(x, y^o) \leq f(x^o, y^o)$ a $-f(x^o, y) \leq -f(x^o, y^o)$ $\rightarrow \boldsymbol{f(x, y^o) \leq f(x^o, y^o) \leq f(x^o, y)}$

Tomuhle se říká **Nashovo rovnovážné řešení (Nashova rovnováha)**. Získáme jej nalezením **sedlového prvku** (sedlového bodu), což je číslo **největší ve svém sloupci** (protože první hráč chce maximalizovat prohru druhého hráče) a **nejmenší ve svém řádku** (protože druhý hráč chce minimalizovat výhru prvního hráče). Jak to může dopadnout? Hra může mít:

(a) jeden sedlový prvek: $\begin{pmatrix} 5 & \boxed{1} & 3 \\ 6 & 5 & \boxed{4} \\ \boxed{2} & 6 & 4 \end{pmatrix}$

Sedlový prvek je a_{23}. Optimální strategie prvního hráče je x_2, druhého hráče y_3, $a_{23} = 4$ je cena hry.

(b) dva sedlové prvky: $\begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} & 3 \\ 5 & 5 & \boxed{4} \\ 6 & 6 & \boxed{4} \end{pmatrix}$

Všechny mají stejnou cenu hry a jako optimální strategii mohu volit kteroukoliv navrženou.

(c) žádný sedlový prvek: : $\begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} & 3 \\ 5 & 5 & \boxed{4} \\ \boxed{4} & 6 & 5 \end{pmatrix}$

Pokud má hra sedlový prvek, nazýváme takové řešení Nashova rovnováha v ryzích strategiích a optimální strategii hrajeme ve 100 % případů. Pokud hra nemá sedlový prvek, hledáme řešení pomocí smíšeného rozšíření. Základní věta maticových her totiž říká, že:

Každá maticová hra má Nashovo rovnovážné řešení (ve smíšených strategiích).

V ní zjišťujeme, s jakou pravděpodobností budou hráč hrát jednotlivé strategie. Takto formulované strategie se nazývají **smíšené (pravděpodobnostní) strategie.**

SMÍŠENÉ ROZŠÍŘENÍ

Úlohu smíšeného rozšíření maticové hry řešíme následovně:

První hráč bude hrát každou ze svých strategií s pravděpodobností ≥ 0 a součet pravděpodobností musí být roven 1. Totéž platí pro druhého hráče

$X = \{\mathbf{x}; \mathbf{x}^\mathbf{T} = (x_1; x_2; \dots; x_m); \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1; \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$

$Y = \{\mathbf{y}; \mathbf{y}^\mathbf{T} = (y_1; y_2; \dots; y_n); \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1; \mathbf{y} \geq \mathbf{0}\}$

Hodnota výplatní funkce prvního hráč je rovna:

$$f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_i a_{ij} y_j = \mathbf{x}^\mathbf{T}\mathbf{A}\mathbf{y}$$

Podle ZVMH existují optimální strategie $(\mathbf{x}^\mathbf{o}, \mathbf{y}^\mathbf{o})$ ve smíšeném rozšíření, neboli existuje Nashova rovnováha, kdy první hráč získá $\mathbf{x}^{\mathbf{o}\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^\mathbf{o}$ a druhý hráč totéž ztratí. Tomu říkáme cena hry. Cenu hry $\mathbf{x}^{\mathbf{o}\mathbf{T}}\mathbf{A}\mathbf{y}^\mathbf{o}$ označme písmenem $\boldsymbol{v}$.

Problém povede na úlohu lineárního programování. Jaké budou její omezující podmínky? Víme, že pro optimální řešení musí platit: $\mathbf{x^T A y^o} \leq \mathbf{x^{oT} A y^o} \leq \mathbf{x^{oT} A y}$. Hledáme tedy ($\mathbf{x^o}$, $\mathbf{y^o}$) splňující uvedené nerovnosti. Nejprve se zaměříme na nerovnost $\mathbf{x^T A y^o} \leq \mathbf{x^{oT} A y^o}$, tzn. $\mathbf{x^T A y^o} \leq \boldsymbol{v}$.

Protože v úloze pracujeme s nerovnicemi, hodilo by se mít v ní jen kladná čísla, abychom si nemuseli dělat starosti, jestli není náhodou třeba obrátit znaménko nerovnosti. Takže pokud jsou všechny prvky matice **A** kladné, můžeme pokračovat v řešení, ale jsou-li některé prvky nekladné, je třeba přičíst vhodnou konstantu tak, aby se všechny prvky staly kladnými. Přičtení konstanty *c* ke všem prvkům v matici nezmění optimální strategie, změní však cenu hry na *v* + *c*, a bude tedy platit vztah:

$$\mathbf{x^T A y^o} \leq \boldsymbol{v} + \boldsymbol{c}$$

K tomu, aby uvedený vztah platil pro všechna $\mathbf{x^T}$, stačí, když bude platit pro všechny ryzí strategie $\mathbf{x^T} = (1,0, \dots ,0)$, $\mathbf{x^T} = (0,1, \dots ,0), \dots, \mathbf{x^T} = (0,0, \dots ,1)$. Smíšené strategie jsou totiž jen lineární kombinací ryzích strategií. Ryzí strategie jsou jen speciální případ smíšených strategií (jednotkové vektory), kdy určitou strategii hrajeme s pravděpodobností 100 %. Takže to můžeme rozepsat:

$$a_{11}{y^o}_1 + a_{12}{y^o}_2 + \cdots + a_{1n}{y^o}_n \leq v + c$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}{y^o}_1 + a_{m2}{y^o}_2 + \cdots + a_{mn}{y^o}_n \leq v + c$$

Abychom se zbavili *v* + *c* napravo, vydělíme uvedené nerovnice výrazem *v* + *c* a substituujeme

$q_j = \frac{{y^o}_j}{v+c}$, $q_j \geq 0$, čímž dostaneme soustavu ve tvaru:

$$a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \cdots + a_{1n}q_n \leq 1$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \cdots + a_{mn}q_n \leq 1$$

$$q_j \geq 0$$

Tohle jsou omezující podmínky úlohy lineárního programování. Z takto formulované úlohy můžeme zjistit, s jakou pravděpodobností bude hrát druhý hráč jednotlivé strategie. Druhý hráč chce minimalizovat *v* + c, takže se snaží maximalizovat $\frac{1}{v+c}$, takže bude chtít maximalizovat $\sum_{j=1}^{n} q_j$.

Celá úloha má tvar:

- Účelová funkce *z*: $\max \sum_{j=1}^{n} q_j$
  za podmínek:
- $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 1, \ \forall i$
- $q_j \geq 0, \ \forall j$

Stejným postupem lze formulovat úlohu pro prvního hráče, čímž dojdeme k úloze ve tvaru:

- Účelová funkce *z*: $\min \sum_{i=1}^{m} p_i$
  za podmínek:
- $\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq 1, \ \forall j$
- $p_i \geq 0, \ \forall i$

To jsou duálně sdružené úlohy: primární úloha (maximalizační) pro druhého hráče a druhá úloha (minimalizační) pro prvního hráče. Tyto úlohy můžeme vyřešit simplexovou metodou a jakožto duálně sdružené úlohy budou mít i stejnou hodnotu účelové funkce. Řešení duální úlohy najdeme v simplexové tabulce primární úlohy pod přídatnými proměnnými (jsou to stínové ceny). Protože ale výstupem budou hodnoty q_j a p_i, zatímco nás zajímají hodnoty $y^o{}_j$ a $x^o{}_i$, musíme provést zpětnou substituci:

- $q_j = \frac{y^o{}_j}{v+c} \quad \rightarrow \quad y^o{}_j = (v+c)q_j = \frac{q_j}{z}$
- $p_i = \frac{x^o{}_i}{v+c} \quad \rightarrow \quad x^o{}_i = (v+c)p_i = \frac{p_i}{z}$
- $\frac{1}{v+c} = z \quad \rightarrow \quad v = \frac{1}{z} - c \quad \rightarrow \quad cena\ hry$

Tím tedy zjistíme, s jakou pravděpodobností by měli hráči hrát jednotlivé strategie.

ZDROJE

Mgr. Jana Sekničková, Ph. D.: prezentace k předmětu 4EK421 Teorie her a ekonomického rozhodování, 2013.